onderdeel van Cito

Onderzoek CTE 2023

Examen in twee delen: een verkenning

Cito CTE

Onderdeel van Cito

Arnhem, Stichting Cito

2023

Auteurs: Irene van Stiphout, Sjaak Kamerling

Met medewerking van: Dennis Mamedov, Henk Reuling, Juan Dominguez, Patrice Kessels, Willem van Bergeijk en Wilma den Boer.

Inhoud

Samenvatting

Dit rapport is een verslag van een onderzoek door Cito CTE waarin een examen in twee delen wordt verkend. Reden hiervoor is de discussie over de grafische rekenmachine die al langer gaande is. Een mogelijk scenario is het opsplitsen van examens in twee delen: een deel met ict en een deel zonder ict. In dit onderzoek is gekeken naar hoe een examen wiskunde B op basis van de huidige syllabi er voor havo en vwo wiskunde B uit zou kunnen zien. Hiervoor zijn twee prototypen ontwikkeld van examens in twee delen: een voor havo wiskunde B en een voor vwo wiskunde B. Deze zijn bedoeld ter inspiratie voor de vakvernieuwingscommissie en als mogelijk voorbeeld van hoe het gebruik van ict in een andere vorm getoetst zou kunnen worden. Daarnaast zijn kansen en belemmeringen die in de constructie een rol spelen in kaart gebracht.

Inleiding en achtergrond

Sinds de invoering van de Tweede Fase eind jaren ’90 heeft de grafische rekenmachine (GR) een plek in het Nederlandse wiskundeonderwijs. Vanuit het oogpunt van centrale examinering staat de grafische rekenmachine onder druk. Toenemende technische mogelijkheden en ongewenste applicaties creëerden problemen in de toetsconstructie en zorgden voor mogelijke ongelijkheid onder examenkandidaten waardoor het College voor Toetsen en Examens (CvTE) zich genoodzaakt zag het gebruik van de GR strakker te reguleren. Dit heeft bijvoorbeeld geresulteerd in een verplichte examenstand van de grafische rekenmachine voor de examens havo vanaf 2018 en vwo vanaf 2019.

In de loop der jaren zijn er allerlei onderzoeken uitgevoerd, zowel door Cito als door CvTE, waarin is gekeken naar alternatieven voor de grafische rekenmachine (e.g. CvTE, 2018; Van Stiphout et al., 2018). Zo is onder meer gekeken naar het gebruik van GeoGebra in schoolexamens en is onderzoek gedaan naar gevolgen voor toetsing van gebruik van computeralgebra (Van Stiphout & Remijn, 2019). In 2018 heeft CvTE een veldraadpleging gehouden waarbij drie scenario’s over de toekomst van het gebruik van ict bij wiskunde-examens zijn voorgelegd aan wiskundedocenten:

- scenario 1: een eindexamen met alleen een ‘gewone’ rekenmachine
- scenario 2: een eindexamen met een computer met GeoGebra
- scenario 3: een eindexamen in twee delen: een deel met en een deel zonder ict en/of technologie.

Scenario 3 had de voorkeur van de deelnemers aan de veldraadpleging (CvTE, 2019). Een gesplitst examen, een deel zonder en een deel met ict, komt ook in een aantal Duitse deelstaten, Scandinavische landen en in deelstaat Victoria in Australië voor. Uit onderzoek van Cito (Van Stiphout & Remijn, 2019) is gebleken dat een gesplitst examen voor havo/vwo wiskunde A geen haalbare kaart is binnen de huidige syllabi omdat in die vakken maar heel beperkt een beroep wordt gedaan op het handmatig uitvoeren van procedures. Dat betekent dat het deel zonder ict, waarin handmatige vaardigheden worden getoetst, wel heel klein zou zijn. Het ligt dus voor de hand om te kijken naar wiskunde B.

Om deze weg verder te verkennen wil Cito twee prototypen ontwikkelen van een examen in twee delen: een voor havo wiskunde B en een voor vwo wiskunde B. De insteek van het onderzoek is om uit te gaan van de huidige syllabi voor wiskunde B.

Het doel van dit onderzoek is tweeledig

- nagaan welke inhoudelijke kansen en belemmeringen er zijn in de constructie
- het veld en de examenprogramma-vernieuwingscommissie inspireren door te laten zien wat er mogelijk is.

Onderzoeksvragen

De onderzoeksvragen die in dit project aan de orde komen, zijn de volgende:

1. Hoe zou een examen wiskunde B op basis van de huidige syllabi er voor havo en vwo wiskunde B uit kunnen zien?
2. Welke kansen en belemmeringen spelen in de constructie een rol?

De opbrengst van dit project bestaat uit twee prototypen gesplitste examens wiskunde B: een voor havo en een voor vwo.

Theoretische achtergrond

De rol van ict in het wiskundeonderwijs in Nederland is, zoals ook in de inleiding al is aangestipt, al jaren inzet van discussie. In 2018 benoemde een commissie van CvTE drie argumenten voor het gebruik van ict bij de centrale examens wiskunde in havo en vwo (CvTE, 2018): het anachronisme-argument, het argument van de rijkere mogelijkheden en het argument van het uitbesteden.

Het anachronisme-argument stelt dat eigentijds onderwijs zal moeten anticiperen op de steeds grotere rol die ict speelt in onze maatschappij. Dat geldt voor het privéleven van burgers, voor studenten en voor professionals in beroepspraktijken. Wiskunde bedrijven met pen en papier zonder gebruik te maken van ict zou betekenen dat het onderwijs los komt te staan van de samenleving en is te beschouwen als een anachronisme.

Het argument van de rijkere mogelijkheden van de commissie stelt dat het gebruik van ict meer verschillende soorten vragen mogelijk maakt. Als voorbeelden worden genoemd het opnemen van simulaties en animaties, het tekenen van grafieken, het oplossen van vergelijkingen en het verkennen en onderzoeken van meetkundige situaties. Ze wijzen erop dat de validiteit en betrouwbaarheid van centrale examens zouden kunnen worden vergroot door een betere afstemming van onderwijs en toetsing.

Het argument van uitbesteden gaat over de mogelijkheid om procedureel werk uit handen te laten nemen door ict waardoor ruimte ontstaat voor hogere orde vaardigheden zoals wiskundig redeneren, probleemoplossen en modelleren (CvTE, 2018).

Het gebruik van een computeralgebrasysteem (CAS) komt tegemoet aan deze drie argumenten. Omdat CAS veel meer opties heeft dan de grafische rekenmachine, was de vraag op welke manier we gebruik wilden maken van die meerwaarde. Hiervoor bleek het model van Böhm et al (2004) zinvol. Zij onderscheiden vijf categorieën CAS-opgaven ten aanzien van de mate waarin CAS een rol speelt in (het vinden van) de oplossing. Later heeft Heugl (2017, p4) daar nog een zesde categorie C-1 aan toegevoegd.

C-1: Examples where CAS impedes the examination of the intended mathematical competence. Instead of that tool competence will be examined.

C0: Traditional examples where neither graphic calculators nor CAS are helpful.

C1: Traditional exercises (developed for scientific calculators) which are solved faster or even trivialized by graphic calculator or spreadsheets.

C2: Traditional exercises (developed for scientific calculators) which are solved faster or even trivialized by CAS.

C3: Examples which only can be solved by the use of graphic calculators or spreadsheets (and also CAS).

C4: Examples which only can be solved by the use of CAS.

De prototypen die we willen opleveren zouden vragen moeten bevatten uit categorie C4: daarin gaat het echt om de meerwaarde van het gebruik van CAS. De lat ligt daarmee hoog. Onderzoek van Heugl (2017) naar vragen over algebra en analyse in de examens van Australië, Denemarken, Duitsland, Noorwegen en Oostenrijk laat zien dat er maar weinig vragen zijn in de categorie C4. De meeste opgaven van de onderzochte examens vallen in de categorie C2.

De verkenning van mogelijkheden voor het gebruik van CAS doen we niet lichtzinnig. Al eerder is door Cito opgemerkt dat het gebruik van computeralgebra in het wiskundeonderwijs een grote verandering zou betekenen en een doordenking zou vragen van het hele curriculum (Van Stiphout & Remijn, 2019). Het gebruik van CAS heeft consequenties voor opvattingen van leerlingen en docenten waar wiskunde over gaat en wat het betekent om wiskunde te doen, op welke wijze leerlingen wiskunde leren en wat hiervoor nodig is en wat de rol van de docent hierin precies is. Al deze aspecten spelen een rol in de relatie tussen onderwijs, toetsing, de toegestane hulpmiddelen en de congruentie daarvan.

Daarnaast vraagt het leren werken met CAS een stevige (tijds)investering van docenten en leerlingen. Goed leren omgaan met de systemen met aandacht voor de input en output, de syntax en het interpreteren van de antwoorden vraagt om een zorgvuldige inbedding in het onderwijs.

Methode

Het onderzoek bestaat grofweg uit de volgende fasen:

1. de voorbereidingen
2. de constructie van de opgaven en inventarisatie van kansen en belemmeringen
3. de samenstelling van prototypen
4. het delen van de bevindingen.

Hieronder wordt per fase beschreven hoe deze is aangepakt.

1. De voorbereidingen

Voor we cg-leden konden werven, moest duidelijk worden hoe de opdracht precies zou worden. Ook wilden we voorbeelden aanleveren van *good practices* uit het buitenland. Daarom is gekeken naar voorbeeldmateriaal met name uit Noorwegen, Zweden, de deelstaat Victoria van Australië, en uit sommige Duitse deelstaten. In bijlage A is een lijst opgenomen van voorbeeldmateriaal, links en opgaven, die zijn uitgereikt aan de constructeurs.

De ambitie van dit onderzoek was het vinden en/of construeren van opgaven in categorie C4. De inzet van CAS zou een meerwaarde moeten hebben op tenminste een van de twee aspecten uit de omschrijving van C4: te moeilijk of ingewikkeld om zonder CAS te doen of niet oplosbaar zonder CAS. Op zoek naar inspirerende voorbeelden bleek dat er weliswaar veel materiaal online te vinden is, maar dat die opgaven nog niet in C4 zaten en ook bleek dat er maar weinig materiaal is dat aansluit bij de wijze waarop de Nederlandse wiskunde-examens zijn ingericht. Het stellen van meerdere vragen in een betekenisvolle context waarbij het gaat om probleemoplossen en modelleren komt niet veel voor. Vragen uit buitenlandse examens zijn vaak kort, soms meerkeuze en contexten zijn heel kort en daardoor niet passend bij de Nederlandse situatie. Om geschikte voorbeelden te kunnen leveren aan de leden van de constructiegroep zijn drie voorbeeldopgaven uit Noorwegen bewerkt en (meer) geschikt gemaakt voor het Nederlandse wiskundeonderwijs.

Vervolgens zijn we op zoek gegaan naar wiskundeleraren en andere experts die bereid waren om binnen dit project opgaven te ontwerpen. Hiervoor zijn constructiegroepsleden (cg-leden) gevraagd van havo/vwo wiskunde B en is rondgevraagd bij oud-cg-leden en in het eigen netwerk. Hieruit ontstond een diverse groep met zes cg-leden. Op 16 februari 2023 is een online aftrapbijeenkomst geweest waarin het project is toegelicht en zijn voorbeelden en verwachtingen besproken.

Ieder cg-lid kreeg de opdracht om twee opgaven te maken van ieder ongeveer vier vragen. Om te zorgen voor spreiding van onderwerpen hebben cg-leden ieder twee domeinen toegewezen gekregen. De eis daarbij was per opgave minimaal twee CAS-specifieke vragen (dus niet te doen met alleen GR) en bij voorkeur opgaven in context. Bij iedere vraag hoort een correctiemodel waarin screenshots zijn opgenomen waaruit blijkt op welke wijze CAS moet worden ingezet.
Hierbij is nadrukkelijk verteld dat het hier gaat om pionieren en dat daarom ook ruwe ideeën of vragen buiten de toegewezen domeinen welkom zijn.

Daarnaast was de opdracht aan cg-leden om bij te houden waar ze tegenaan liepen in de constructie. Waar liggen kansen en mogelijkheden, waar is het lastig of moeilijk om vragen te bedenken?

2. De constructie van de opgaven en inventarisatie van problemen en kansen

Dit project levert twee prototypen gesplitste examens op, een voor havo wiskunde B en een voor vwo wiskunde B. De prototypen bevatten net als de reguliere examens opgaven uit verschillende domeinen, al is de verhouding van aantallen opgaven uit de verschillende domeinen in de prototypen vrijer omdat deze niet hoeven te voldoen aan de constructieopdracht. De reden hiervoor is dat we onszelf niet teveel restricties willen opleggen. Verder is afgesproken dat ieder prototype ongeveer 75 scorepunten omvat (havo en vwo): 35-40 scorepunten voor beide delen (met/zonder ict). De opgaven zonder ict worden door Cito ontwikkeld en/of aangeleverd, de opgaven met ict door de cg-leden.

Tijdens de constructie houden cg-leden bij waar ze tegenaan lopen, waar de constructie moeilijk is, welke onderwerpen zich juist wel of juist niet lenen voor vragen waarin CAS gebruikt kan worden. Cg-leden konden ook ruwe ideeën of vragen buiten de toegewezen domeinen inleveren. De opgaven worden ingeleverd in Word, met zo weinig mogelijk opmaak. Een gelijke lay-out van de prototypen wordt verzorgd door Cito. Formules worden aangeleverd in de formule-editor van

Word of in Mathtype. Van afbeeldingen wordt de bron vermeld. Opgaven die zijn ontwikkeld worden naar de hele groep gestuurd.

Tijdens de constructie kwamen al afwegingen, problemen, kansen en dilemma's naar voren. Aan het einde van de constructietijd zijn deze geïnventariseerd aan de hand van de volgende vragen:

1. Waar zie je aanknopingspunten voor het gebruik van CAS?
2. Wat zou kunnen helpen om de constructie te vergemakkelijken?

Cg-leden hebben deze vragen per mail beantwoord.

3. De samenstelling van prototypen

Nadat cg-leden hun opgaven hebben ingestuurd, zijn deze bewerkt door Cito. Als raamwerk is de toetsmatrijs gebruikt op basis waarvan de reguliere examens worden gemaakt. Op deze manier konden we ervoor zorgen dat alle domeinen aan de orde komen en het examen evenwichtig is en als geheel herkenbaar blijft voor het veld.
Voor het CAS-deel zijn soms reeds gebruikte examenopgaven aangepast naar CAS. Voor het deel zonder ict is gebruikgemaakt van reeds bestaande examenopgaven. De redenen hiervoor zijn de werkdruk en het idee dat het nieuwe van een examen in twee delen zit in het deel met CAS. Soms zijn bestaande examenopgaven aangepast om deze rekenmachinevrij te maken.

4. Het delen van de bevindingen

De resultaten van dit onderzoek worden gedeeld met de vakvernieuwingscommissie en met het veld.

Resultaten

In deze paragraaf beschrijven we de constructie, de inventarisatie van de kansen en problemen en de samenstelling van de prototypen.

Constructie

Tijdens de constructie bleek al snel dat het construeren van vragen in categorie C4 moeilijker was dan gedacht. Het voorbeeldmateriaal dat was aangeleverd bood weinig houvast omdat de Nederlandse structuur van een opgave met daarin meerdere vragen niet terug te vinden is. Ook het balanceren tussen te simpele vragen en te ingewikkelde vragen bleek ingewikkeld. Daarbij speelde ook de beperkte eigen ervaring met CAS-mogelijkheden een rol. Na uitwisseling van ervaringen en opgaven is het wel gelukt om opgaven te construeren en/of deze aan te passen zodat ze geschikt waren voor opname in de prototypen. Tijdens de constructie zijn keuzes gemaakt. Deze keuzes zetten we hieronder op een rij.

Gemaakte keuzes bij constructie prototypen

Herkenbaar examen

Om de prototypen herkenbaar te laten zijn, sluiten we aan bij de huidige praktijk van examens wiskunde B. Dat betekent dat ze wat betreft omvang, aantal scorepunten, opzet van een paar vragen binnen een bepaalde context en onderwerpen aansluiten bij de papieren examens.

Ict-omgeving

Voor de constructie is gebruikgemaakt van de computeralgebra-omgeving van GeoGebra. De reden hiervoor is pragmatisch: cg-leden en toetsdeskundigen waren bekend met GeoGebra. Het gaat hier niet om een principiële keuze; we willen geenszins andere CAS-mogelijkheden uitsluiten. Tijdens de constructie werd duidelijk dat de CAS-module van GeoGebra beperkingen heeft. De in- en uitvoer is bijvoorbeeld anders dan leerlingen gewend zijn. Leerlingen en docenten zullen moeten leren omgaan met CAS.

In de toetsmatrijzen is aangegeven welk type CAS-commando is gevraagd. Reden: uitgangspunt is dat de examens geen uitgebreide CAS-knoppencursus moeten worden. Daarom wilden we een overzichtelijke lijst commando's, waarbij we wilden aansluiten bij het huidige gebruik van de grafische rekenmachine.

Breed spectrum

Het deel zonder ict is echt zonder ict, dus ook geen *gewone* rekenmachine. De reden hiervoor is dat ook *gewone* rekenmachines (wat daar dan ook onder verstaan moet worden) steeds meer kunnen. Denk bijvoorbeeld aan meerregelige displays, het kunnen maken van tabellen, scrollen op het scherm et cetera waardoor het verschil tussen *gewone* rekenmachines en meer geavanceerde rekenmachines minder helder wordt. Bovendien wilden we met de prototypen de randen opzoeken van wat mogelijk is om zicht te bieden op de breedte van het spectrum aan mogelijke invullingen van gesplitste examens.

Spreiding over domeinen en contexten

Een van de vragen die we hadden was of het mogelijk is om CAS-vragen te stellen binnen ieder domein. Daarom zijn de opgaven in het CAS-deel verspreid over alle domeinen (uitgezonderd domein A Vaardigheden). Voor havo zijn dat de domeinen

- B Functies grafieken en vergelijkingen
- C Meetkundige berekeningen
- D Toegepaste analyse.

Voor vwo zijn dat de domeinen

- B Functies, grafieken en vergelijkingen
- C Differentiaal- en integraalrekening
- D Goniometrische functies
- E Meetkunde met coördinaten.

Ook wilden we in het CAS-deel opgaven in contexten. Voor opgaven in het deel zonder ict is gebruikgemaakt van bestaande examenopgaven. De reden is pragmatisch: alles nieuw ontwikkelen kost veel tijd.

Buiten de scope van dit onderzoek

Het opsplitsen van de examens wiskunde B in twee delen vraagt om een andere manier van organiseren van examens dan we tot nu toe gewend zijn, zowel praktisch als inhoudelijk. Onderzoek van CvTE (2019) laat zien dat daar nog flink wat denkwerk ligt rondom de praktische organiseerbaarheid, bijvoorbeeld de vraag of beide delen op één dag moeten worden afgenomen, hoe er dan gewisseld wordt, hoe met herkansingen moet worden omgegaan et cetera. Ook zijn er inhoudelijke vragen die in dit onderzoek onbeantwoord blijven. Dat gaat bijvoorbeeld over wat er van leerlingen wordt verwacht over het vastleggen van het gebruik van CAS. Is een screenshot genoeg? Hoe wordt dat ingeleverd? Geplakt in een document? Deze vragen zijn niet meegenomen in het ontwerp van de prototypen.

Inventarisatie kansen en belemmeringen

Gedurende de constructie zijn cg-leden en toetsdeskundigen allerlei kansen en belemmeringen tegengekomen.

Omgaan met CAS

Zoals hiervoor is opgemerkt, is het gebruik van CAS in GeoGebra wennen. Dit betekent dat leren werken met CAS een tijdsinvestering vraagt (nu geldt dat, wellicht in mindere mate, voor leren werken met de GR). Een voorbeeld hiervan is de wiskundige notatie van CAS. Zo staat daar f' in plaats van $f'(x)$, wordt het symbool $:=$ gebruikt in de definitie $f(x):=$ van een functie.

Daarnaast is het CAS-scherm van GeoGebra gebruiksonvriendelijk. Zo raakt bijvoorbeeld het beeldscherm gauw vol waardoor je moet scrollen. Ook is de syntax nu nog ingewikkeld, is het zoeken naar een geschikt commando en is de output niet zoals leerlingen gewend zijn. De oplossingen van een vergelijking worden gepresenteerd als een verzameling, bijvoorbeeld $\{x=-5, x=2, x=3\}$ in plaats van $x=-5 \vee x=2 \vee x=3$.

Op de korte termijn is het leren werken met CAS een belemmering: het kost docenten en leerlingen tijd om hiermee om te leren gaan. Op de langere termijn zou voor het gebruik van CAS op grote schaal door leerlingen, de CAS-module wellicht meer ontwikkeld kunnen worden. Het gebruik van CAS kan een kans zijn in het overzichtelijk noteren van uitwerkingen en in het houden van overzicht daarin.

Constructie van opgaven

Vragen bedenken voor het CAS-deel vraagt meer van constructeurs. Dat komt omdat de grens tussen een knoppencursus CAS en een betekenisvolle vraag die met CAS kan worden opgelost een dun lijntje is. CAS kan rekenwerk uit handen nemen, maar het is oppassen dat het niet te veel invulwerk wordt, wat knoppen achter elkaar indrukken. Uiteindelijk gaat het erom hoe met behulp van CAS betekenisvolle wiskunde kan worden gedaan.

Kansen die er liggen zijn rekenwerk uit handen laten nemen door CAS door bijvoorbeeld een afgeleide te vragen die handmatig net boven de examenstof ligt of een limiet te vragen die daar net boven ligt. Een belemmering kan zijn dat CAS technieken uit handen neemt, terwijl het huidige onderwijs wiskunde B juist grotendeels gaat over technieken.

Rekenwerk in deel zonder CAS

Het deel zonder ict vraagt meer van leerlingen. In het domein meetkunde bijvoorbeeld moeten berekeningen mooi uitkomen zodat leerlingen deze zonder gebruik van een rekenmachine kunnen doen. Een mogelijkheid is dat wordt afgesproken genoegen te nemen met een antwoord voor een lengte van een zijde van de vorm $17 \cdot sin(35°)$ zonder dat dit verder benaderd moet worden.

Oplossing overzien

Het gebruik van CAS vraagt van leerlingen om hun oplossingsstrategie te overzien. Zo biedt CAS een meerwaarde in het algoritmisch denken: je moet eerst goed nadenken hoe je een probleem aanpakt voor je het kunt uitbesteden aan de computer. Dat vraagt van leerlingen een globale blik op het oplossingsproces, waarin een plan is om tot een oplossing te komen en ze overzicht hebben op welke onderdelen ze zelf moeten uitvoeren of berekenen en welke onderdelen uitbesteed kunnen worden aan CAS. Daarnaast zullen ze ook moeten nadenken over welke invoer CAS dan precies nodig heeft.

Algemeen zien we kansen voor CAS om rekenwerk uit handen te nemen. Dat biedt de mogelijkheid om vragen te stellen waarvan het rekenwerk buiten de examenstof valt. Tegelijk zit daar ook een valkuil: een betekenisvolle inzet van CAS vraagt om meer dan invulwerk. Het blijft nadenken waar precies de meerwaarde zit van CAS, of dat geldt voor havo en/of vwo, of dat geldt voor alle domeinen.

Constructie prototypen

Voor het samenstellen van de prototypen is gebruikgemaakt van de principes die hiervoor zijn beschreven wat betreft verdeling van het aantal scorepunten, domeinen et cetera. Om overzicht te houden op relevante karakteristieken zijn toetsmatrijzen opgesteld. Deze zijn gebaseerd op de toetsmatrijzen die in de huidige constructie van de examens worden gebruikt. De toetsmatrijzen zijn te vinden in tabel 1 (havo) en tabel 3 (vwo). Daarin zijn de volgende kenmerken in opgenomen:

- het deel waarin de vraag zit: CAS-deel of deel zonder ict
- context of kale vraag
- het nummer van de vraag
- het maximum aantal scorepunten van de vraag
- het domein waar de vraag onder valt
- het type vaardigheid waar de vraag over gaat; hierbij wordt onderscheid gemaakt tussen onderzoeksvaardigheden, technisch instrumentele vaardigheden en algebraïsche vaardigheden
- het type CAS-activiteit dat gebruikt wordt:
    - CAS vervangen
    - CAS oplossen vergelijking
    - CAS oplossen stelsel
    - CAS afstand
    - CAS afgeleide
    - CAS integraal (alleen vwo)
    - CAS overig.

Daarnaast zijn alle CAS-vragen voorzien van een classificering volgens het model van Heugl (2017). De resultaten hiervan zijn te vinden in tabel 2 (havo) en tabel 4 (vwo).

Tabel 1: Toetsmatrijs van havo wiskunde B

havo wiskunde B	**CAS-deel**	**Context**	**Vraag in examen**	**maximumscore**	**B Functies grafieken en vergelijkingen**	**D Toegepaste analyse**	**C Meetkundige berekeningen**	**onderzoeksvaardigheden**	**technisch instrumentele vaardigheden**	**algebraïsche vaardigheden**	**CAS Vervangen**	**CAS Oplossen vergelijking**	**CAS Oplossen stelsel**	**CAS Afstand**	**CAS Afgeleide**	**CAS Overig**
Buitenrand en binnenrand			1	**4**			4		4							
			2	**4**			4		4							
De boog van een waterstraal		1	3	**5**	2	3		1	4							
		1	4	**5**	5			3	2							
Een cirkelboog en een raaklijn			5	**3**		3			3							
			6	**3**			3	1	2							
			7	**4**			4	2	2							
Wereldbevolking		1	8	**3**	3			1	2							
		1	9	**4**	4			2	1							
		1	10	**2**	2			1	1							
Twee functies (2023-1)			11	**3**	3			3								
			12	**4**	4					4						
			13	**4**	4			1		3						
Parabool en grafiek van een wortelfunctie (2023-1)			14	**3**	3			2		1						
			15	**8**	5	3		5		3						
Drie snijpunten (2021-2)			16	**4**	4			4								
			17	**5**	5			2		3						
Hoe lang is DE? (2019-2)			18	**6**			6	4		2						
Totaal			**18**	**74**	**44**	**9**	**21**	**32**	**25**	**16**						
					59%	**12%**	**28%**	**43%**	**34%**	**22%**						

Tabel 2: Classificering van CAS-vragen volgens het model van Heugl (2017).

havo wiskunde B	Vraag in examen	maximum-score	Classificering	Onderbouwing
Buitenrand en binnenrand	1	4	C3	In deze vraag zit een parameter en moet een vergelijking met die parameter worden opgelost.
	2	4	C4	Het rekenwerk is voor havoleerlingen moeilijk, tijdrovend of zelfs niet met de hand te doen.
De boog van een waterstraal	3	5	C3	De extra variabele zorgt ervoor dat leerlingen CAS nodig hebben.
	4	5	C3	De extra variabele zorgt ervoor dat leerlingen CAS nodig hebben.
Een cirkelboog en een raaklijn	5	3	C4	Deze afgeleide valt buiten de syllabus van havo wiskunde B. Leerlingen hebben hier CAS nodig om de vraag te kunnen beantwoorden.
	6	3	C4	De uitdrukking is ingewikkeld en de vergelijking is niet op te lossen zonder hulp van CAS.
	7	4	C4	Deze vraag is moeilijk of tijdrovend op te lossen zonder CAS of is alleen maar op te lossen met behulp van CAS.
Wereldbevolking	8	3	C4	Deze vraag is moeilijk of tijdrovend op te lossen zonder CAS of is alleen maar op te lossen met behulp van CAS.
	9	4	C1	Deze vraag kan ook met de GR worden opgelost. CAS voegt hier niet veel toe.
	10	2	C3	Oplossen van het stelsel met de GR is ingewikkeld. De inzet van CAS daarentegen biedt goede oplossingsmogelijkheden.

Tabel 3: Toetsmatrijs van vwo wiskunde B

vwo wiskunde B	CAS-deel	Context	Vraag in examen	maximumscore	B Formules, functies en grafieken D Goniometrische functies	C Differentiaal- en integraalrekening	E Meetkunde met coördinaten	onderzoeksvaardigheden	technisch instrumentele vaardigheden	algebraische vaardigheden	CAS Vervangen	CAS Oplossen vergelijking	CAS Oplossen stelsel	CAS Afstand	CAS Afgeleide	CAS integraal	CAS Overig
Driehoek met twee cirkels			1	**5**			5	3	2								
			2	**5**			5	3	2								
Vulkaan		1	3	**4**		2	2	1	3								
		1	4	**5**		2	3	1	4								
Wereldbevolking		1	5	**8**	4	4		3	5								
Op een lijn?			6	**5**	5			4	1								
Goniometrische functies			7	**7**	2	5		2	5								
Op de diagonaal van een vierkant (2022-2)			8	**6**			6	5		1							
Absolute waarde en wortelfunctie (2023-2)			9	**5**		5		2		3							
Een gebroken functie (2017-1 pilot)			10	**4**	4			2		2							
			11	**5**		5		3		2							
			12	**4**	4			3		1							
Gebroken goniometrische functie (2019-1)			13	**6**	6			1		5							
			14	**4**			4	3		1							
Twee punten op een grafiek (2022-2)			15	**5**	5			3		2							
Totaal			**15**	**78**	**30**	**23**	**25**	**39**	**22**	**17**							
					38%	**29%**	**32%**	**50%**	**28%**	**22%**							

Tabel 4: Classificering van CAS-vragen volgens het model van Heugl (2017).

vwo wiskunde B	Vraag in examen	maximum-score	Classificering	Onderbouwing
Driehoek met twee cirkels	1	5	C4	In principe op te lossen zonder CAS door leerlingen, maar dat is moeilijk en tijdrovend.
	2	5	C4	De berekening is voor leerlingen niet te doen zonder CAS.
Vulkaan	3	4	C2	De berekening kunnen leerlingen ook met de hand; met CAS is sneller.
	4	5	C2	Deze vraag kan ook met de GR, al is dat wel gedoe.
Wereldbevolking	5	8	C4	Het rekenwerk is ingewikkeld en tijdrovend om met de hand te doen.
Op een lijn?	6	5	C3	De limiet die bij deze vraag moet worden bepaald, is voor leerlingen niet zonder CAS te bepalen.
Goniometrische functies	7	7	C4	Het rekenwerk is ingewikkeld en tijdrovend om met de hand te doen.

Conclusies

In dit onderzoek is onderzocht hoe een examen wiskunde B op basis van de huidige syllabi er voor havo en vwo wiskunde B uit kan zien en welke kansen en belemmeringen in de constructie een rol spelen. Aanleiding hiervoor was de constatering van het CvTE dat een examen in twee delen de meest geschikte vorm lijkt voor examens wiskunde voor de lange termijn (CvTE, 2018). Dit onderzoek past in de missie van Cito om op basis van expertise een bijdrage te leveren aan maatschappelijke discussies rondom toetsing.

De constructie van de examens in twee delen was pionieren: niet eerder zijn er in Nederland examens in deze vorm ontwikkeld. Van de constructeurs die aan dit project hebben meegewerkt, hebben we veel gevraagd. Zij moesten buiten de gebaande paden denken, zich verdiepen in de mogelijkheden van CAS en tegelijkertijd zicht houden op hun eigen leerproces door kansen en belemmeringen in beeld te brengen. De opbrengst mag er zijn vinden we: er liggen nu twee prototypen van examens in twee delen, één voor havo en één voor vwo. Met de gemaakte prototypen is er nu een Nederlandse variant van examens in twee delen, passend bij de huidige vorm van examens van contexten met vragen. De voorbeelden die we in het buitenland zagen, waren ofwel kale vragen ofwel korte contexten.
De vragen die we hebben ontwikkeld, categoriseren we veelal in categorie C4, vragen dus die moeilijk of tijdrovend zijn op te lossen zonder CAS of die alleen maar zijn op te lossen met behulp van CAS. De inzet van CAS is hiermee veelal betekenisvol.
In onze ogen vraagt de inzet van CAS van leerlingen dat ze zicht hebben op het oplossingsproces als geheel en dat ze helder moeten krijgen op welk punt in het proces ze CAS moeten inzetten. Van de constructeurs vraagt het bedenken van CAS-vragen een andere manier van naar wiskunde kijken. Juist omdat er meer mogelijkheden zijn wat betreft het rekenwerk kan dieper worden ingegaan op onderliggende wiskundige concepten.
In dit onderzoek is gekeken naar de rol van CAS binnen de context van toetsing. In het onderwijs zien we meer mogelijkheden voor CAS. Een voorbeeld hiervan is het onderzoeken van modellen en verbanden aan de hand van schuifparameters. In de context van de prototypen hebben we deze mogelijkheid niet verder onderzocht.

We beseffen dat de keuzes die zijn gemaakt, onderwerp kunnen zijn van kritiek. We noemen een paar discussiepunten.

Als eerste willen we opnieuw benadrukken dat het gebruik van CAS in het voortgezet onderwijs een doordenking vraagt van het gehele curriculum. De inzet van CAS gaat verder dan de keuze van toegestane hulpmiddelen bij de examens. Leerlingen zullen moeten wennen aan het gebruik van CAS en aan welke commando's gegeven moeten worden. Daarnaast zullen ze moeten wennen aan de manier hoe CAS kan worden ingezet. Daarbij is de vraag welke rekenstappen zich op welke manier lenen voor het inzetten van CAS. Dit vraagt om een andere manier van naar problemen kijken, waarbij het oplossingsproces moet worden overzien en bekeken moet worden welke onderdelen van de berekening aan CAS kunnen worden uitbesteed. Van docenten zal dit een andere didactiek vragen ten aanzien van bijvoorbeeld probleemoplossen. Al deze aspecten spelen een rol in de relatie tussen onderwijs en de toetsing en in de congruentie daarvan.

De gebruikersvriendelijkheid van CAS van GeoGebra kan beter. Mocht computeralgebra op grote schaal in het wiskundeonderwijs gebruikt gaan worden, dan is het in onze ogen wenselijk dat ontwikkelaars van computeralgebrasystemen nagaan of die gebruikersvriendelijkheid verbeterd kan worden en meer afgestemd op de doelgroep.

De inzet van computeralgebra vraagt ook van leerlingen dat ze de beschikking hebben over een device waar een CAS op kan draaien. Dat geldt dan voor alle havo- en vwo-leerlingen met wiskunde B. Dit vraagt om een zorgvuldige inbedding om bijvoorbeeld kansenongelijkheid te voorkomen.

De praktische organisatie van een examen in twee delen is een hele klus waar nog veel werk voor verricht moet worden. Dit onderwerp maakte geen deel uit van dit onderzoek. Dat neemt niet weg dat we zien dat dit een belangrijk punt is, waar nog veel haken en ogen aan zitten. De haalbaarheid van een examen in twee delen zal in belangrijke mate afhangen van de praktische organiseerbaarheid in scholen. Hierbij kan Nederland leren van de organisatie in onder meer de Scandinavische landen en Duitsland waar afname van examens in twee delen al jaren de praktijk is.

De keuze om het deel zonder ict echt zonder enig hulpmiddel te doen, dus ook zonder een gewone rekenmachine, vraagt misschien wel teveel van leerlingen. Handmatig rekenen krijgt op deze manier wellicht een te groot aandeel in het centraal examen. Een optie is om een beperkte rekenmachine toe te staan. Wel dient opgemerkt te worden dat er dan goed moet worden nagedacht over welke opties die rekenmachine dan zou moeten of mogen hebben.

De vraag is ook of alle domeinen wel in beide delen aan de orde moeten komen. In de prototypen hebben we dit gedaan omdat we wilden onderzoeken of vragen in beide delen (deel met CAS en deel zonder CAS) kunnen voorkomen. Dat kan, dat laten we zien. Dan is vervolgens de vraag of, en zo ja in hoeverre, dat wenselijk is.

Tot slot

De gemaakte prototypen zijn bedoeld ter inspiratie voor de vakvernieuwingscommissie en als mogelijk voorbeeld van hoe het gebruik van ict in een andere vorm getoetst zou kunnen worden. Het praat immers makkelijker als er een concreet product ligt. In onze ogen laten de prototypen zien dat een examen in twee delen mogelijkheden biedt om breder en dieper en daardoor ook rijker met (de toetsing van) wiskunde om te gaan. Tijdens de constructie is duidelijk geworden dat er nog een hoop open eindjes zijn waar nog flink over moet worden nagedacht.
De kern van de vraag in hoeverre de inzet van CAS wenselijk is, gaat over de vraag wat voor wiskunde we als maatschappij vinden dat leerlingen moeten leren. Dat is tevens de hoofdvraag voor de vakvernieuwingscommissie.

Disseminatie

Cito wil met deze prototypen bijdragen aan de maatschappelijke discussie rondom het gebruik van ict in de examens. Daarom hebben we de resultaten van dit onderzoek op verschillende platforms gedeeld.

- Op 29 september 2023 zijn de eerste resultaten gedeeld bij Onderwijs meets onderzoek 2023.
- Op woensdag 11 oktober 2023 zijn de prototypen gepresenteerd aan de vakvernieuwingscommissie wiskunde havo en vwo.

- Op dinsdag 31 oktober 2023 zijn enkele opgaven van de prototypen gepresenteerd tijdens de Wiskundedialoog.
- Een artikel voor het vakblad Euclides wordt verwacht in 2024.

Literatuur

Böhm, J., Forbes, I., Herweyers, G., Hugelshofer, R. & Schomacker, G. (2004). *The case for CAS.* T3 Europe.

College voor Toetsen en Examens. (2018). *Toekomstbestendig Toetsen ICT bij de centrale examens wiskunde havo/vwo. Rapport CvTE-commissie Inzet ICT bij de centrale examens wiskunde havo/vwo*. CvTE.

College voor Toetsen en Examens. (2019, 27 mei). *Wiskunde-examens en technologie*. Geraadpleegd op 29 januari 2024, van https://www.examenblad.nl/2019/nieuws/2019-05-27-wiskunde-examens-technologie

Heugl, H. (2017). *The use of CAS in exams*. A lecture at the T3 conference in Chicago.

Remijn, J. & Van Stiphout, I.M. (2018). *GeoGebra als vervanging van de GR*. Posterbijdrage Onderwijs Meets Onderzoek, 11 oktober 2011.

Van Stiphout, I., Claus, I. & Remijn, J. (2018). *GeoGebra als vervanging van de Grafische Rekenmachine. Onderzoeksagenda CTE 2017*. Cito.

Van Stiphout, I.M., Claus, I. & Remijn, J. (2018). GeoGebra als vervanging van de grafische rekenmachine. *Euclides*, *93*(6): 1-13.

Van Stiphout, I.M. & Remijn, J. (2019). *Computeralgebra in de centrale examens VWO wiskunde A en B. Onderzoeksagenda CTE 2018*. Cito.

Van Stiphout, I. & Remijn, J. (2019). *Computeralgebra in de centrale eindexamens VWO wiskunde A en B. Onderzoek CTE 2018*. Cito.

Bijlage A: voorbeeldmateriaal constructeurs

Links voorbeeldmateriaal:

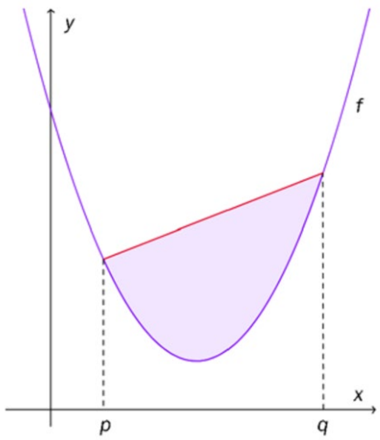
- Voorbeelden van Australië (Victoria): https://www.vcaa.vic.edu.au/assessment/vce-assessment/past-examinations/Pages/Mathematical-Methods.aspx
- Voorbeelden van Beieren: http://www.isb.bayern.de/download/8237/cas_mathematik_gymnasium.pdf
- Voorbeelden van Duitsland: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik/erhoeht
- Voorbeelden van Denemarken, Noorwegen, Zweden, Duitsland en Oostenrijk: https://ti-unterrichtsmaterialien.net/fileadmin/user_upload/Chicago_2017_Heugl_text_01.pdf
- Voorbeelden van Noorwegen https://www.matematikk.net/side/Eksamensoppgaver: de opgaven op R2-niveau liggen in de buurt van vwo.

Voorbeeldopgave 1 CAS

Bron:
https://www.matematikksenteret.no/eksamen-pr%C3%B8ver-og-kartlegging/digitale-verkt%C3%B8y-p%C3%A5-eksamen-i-matematikk/cas/matematikk-r2

De functie f wordt gegeven door $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a > 0$.
De grafiek van f is een parabool.
Op deze parabool liggen twee punten met x-coördinaten p en q, met $p < q$.
We bekijken het gebied begrensd door de lijn door deze twee punten en de parabool.
Zie figuur.

figuur



De oppervlakte van het gebied tussen lijn en parabool is uit te drukken in a en het verschil $p - q$.

Toon dit aan met behulp van CAS.

Uitwerking met GeoGebra CAS (screenshot: offline GeoGebra Klassiek 6)

1	f(x) := a x² + b x + c → $\mathbf{f(x) := a\,x^2 + b\,x + c}$
2	Rechte((p, f(p)), (q, f(q))) → $\mathbf{y = x\,(a\,p + a\,q + b) - a\,p\,q + c}$
3	IntegraalTussen(x (a p + a q + b) − a p q + c, f, p, q) → $\mathbf{-a\left(\frac{-1}{6}\,(-p^3 + 3\,p^2\,q) + \frac{1}{6}\,(-q^3 + 3\,p\,q^2)\right)}$
4	Ontbinden($3) → $\mathbf{-(p - q)^3 \cdot \frac{a}{6}}$

Voorbeeldopgave 2 CAS

Bron:
https://www.matematikksenteret.no/eksamen-pr%C3%B8ver-og-kartlegging/digitale-verkt%C3%B8y-p%C3%A5-eksamen/graftegner/matematikk-1t-eksempeloppgave

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 0,5x^3 - 3,25x^2 + 6x - 2,25$ op het domein $[-1,4]$.
De grafiek van f heeft drie raaklijnen die door de oorsprong gaan.

1. Teken, met behulp van CAS/GeoGebra, de grafiek van f in een coördinatenstelsel en schets deze drie raaklijnen.

2. Stel met behulp van CAS een algemene vergelijking op van de raaklijn die de grafiek van f in het punt $(x_1, f(x_1))$ raakt. Gebruik deze vergelijking om met behulp van CAS de coördinaten van de drie raakpunten te bepalen waar de bijbehorende raaklijn door de oorsprong gaat.

Uitwerking met GeoGebra CAS (screenshot: offline GeoGebra Klassiek 6)

Onderdeel 2

1 $f(x) := 0.5\,x^3 - 3.25\,x^2 + 6\,x - 2.25$

$\rightarrow\ f(x) := \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{4}x^2 + 6x - \frac{9}{4}$

2 $y - f(x_1) = f'(x_1)\,(x - x_1)$

$\rightarrow\ \frac{-1}{2}x_1^3 + \frac{13}{4}x_1^2 - 6x_1 + y + \frac{9}{4} = \frac{1}{2}(-x_1 + x)\,(3x_1^2 - 13x_1 + 12)$

3 Vervangen($2, x = 0, y = 0)

$\rightarrow\ \frac{-1}{2}x_1^3 + \frac{13}{4}x_1^2 - 6x_1 + \frac{9}{4} = \frac{-3}{2}x_1^3 + \frac{13}{2}x_1^2 - 6x_1$

4 Oplossen($3, x_1)

$\rightarrow\ \left\{x_1 = \frac{-3}{4}, x_1 = 1, x_1 = 3\right\}$

5 $f\left(-\frac{3}{4}\right)$

$\rightarrow\ \frac{-1125}{128}$

6 $f(1)$

$\rightarrow\ 1$

7 $f(3)$

$\rightarrow\ 0$

Voorbeeldopgave 3 CAS

Bron:
https://www.matematikksenteret.no/eksamen-pr%C3%B8ver-og-kartlegging/digitale-verkt%C3%B8y-p%C3%A5-eksamen/graftegner/matematikk-r1-eksempeloppgave

De banen van twee vliegtuigen A en B worden gegeven door de bewegingsvergelijkingen:

$$A: \begin{cases} x_A(t) = 70t + 2 \\ y_A(t) = 140t^2 \end{cases}, \text{ met } 0 \le t \le 1$$

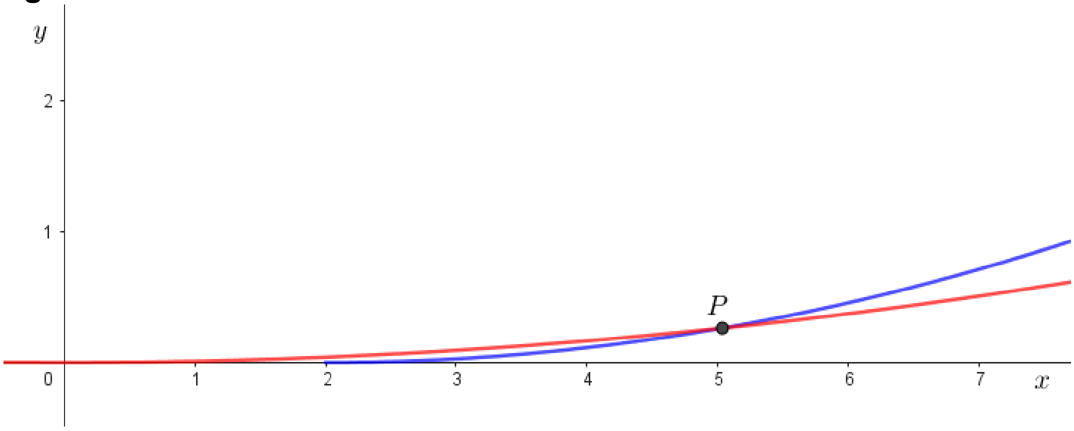
en

$$B: \begin{cases} x_B(t) = -204t + 17 \\ y_B(t) = 432t^2 - 72t + 3 \end{cases}, \text{ met } 0 \le t \le 1$$

Hierbij is t de tijd in uren en x en y in kilometers.

Vliegtuig A stijgt op volgens de blauwe baan en vliegtuig B landt volgens de rode baan. Zie figuur.

figuur



De landingsbaan valt samen met de x-as. Op de y-as is de hoogte van een vliegtuig ten opzichte van de landingsbaan aangegeven.

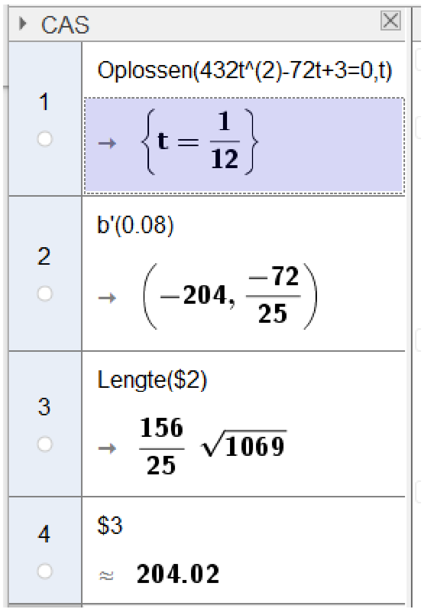
1. Bepaal met behulp van CAS het tijdstip waarop vliegtuig B landt.
2. Bepaal met behulp van CAS de snelheid van vliegtuig B op $t = 0{,}08$.

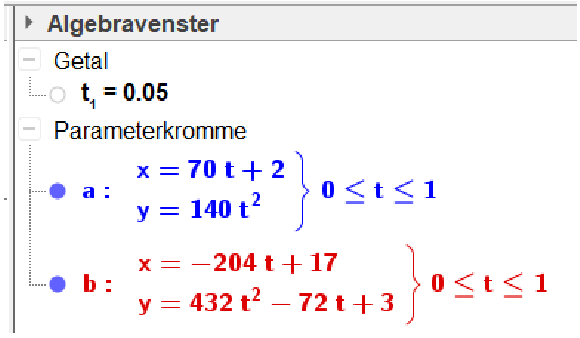
In de figuur is het punt P weergegeven dat op beide banen ligt.

3. Onderzoek met behulp van GeoGebra of in P de vliegtuigen op elkaar botsen.

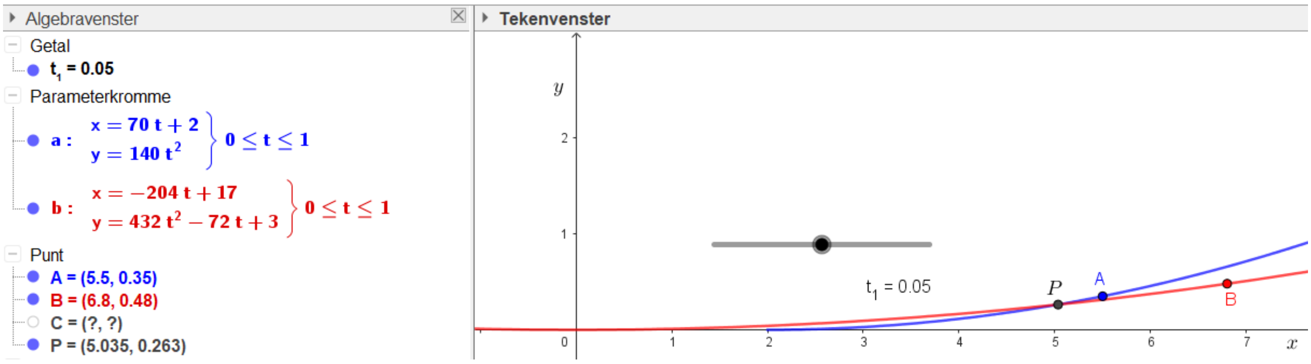
Uitwerking met GeoGebra CAS (screenshots: offline GeoGebra Klassiek 6)

Onderdeel 1 en 2





Onderdeel 3



Met een schuifknop kunnen de bewegingen van A en B in GeoGebra in beeld worden gebracht. Dan is te zien dat A al voorbij P is op het moment dat B P passeert.

Bijlagen B: prototypen examens in twee delen

Opmerking

De prototypen examens die binnen dit onderzoek zijn ontwikkeld, zijn met uiterste zorg samengesteld. Ze hebben echter **niet** de kwaliteitsstappen doorlopen die reguliere examens doorlopen. Concreet betekent dit bijvoorbeeld dat de kans op onjuistheden groter is, de formulering soms strakker kan, de afbeeldingen niet altijd scherp zijn en de lettertypen in de afbeeldingen niet consequent zijn.

Prototype Examen in twee delen HAVO

Opgaven

Dit examen bestaat uit 18 vragen:

- 10 vragen in het CAS-deel
- 8 vragen in het deel zonder hulpmiddelen.

Voor dit examen zijn maximaal 74 punten te behalen:

- 37 punten voor het CAS-deel
- 37 punten voor het deel zonder hulpmiddelen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Prototype Examen in twee delen HAVO

Opgaven

Deel met CAS — wiskunde B

Dit deel van het examen bestaat uit 10 vragen. Voor dit deel van het examen zijn maximaal 37 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd.
Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

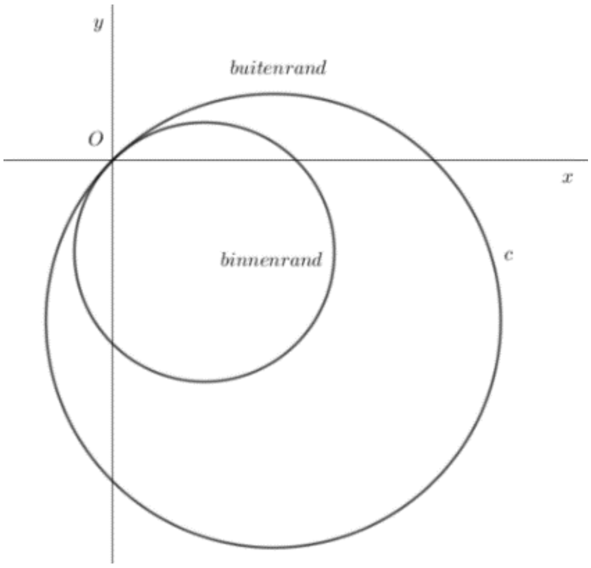
Buitenrand en binnenrand

Op de foto zie je een beeldhouwwerk van de Britse kunstenaar Tom Stogdon.

In een wiskundig model worden de buitenrand en de binnenrand van het kunstwerk in een assenstelsel geplaatst. Zie figuur 1.

foto

figuur 1



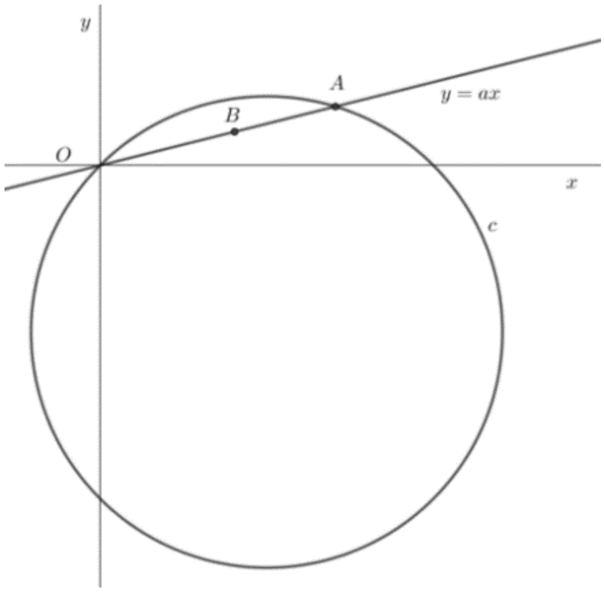
De buitenrand is een cirkel c met vergelijking $x^2 - 2x + y^2 + 2y = 0$. De binnenrand ontstaat uit de buitenrand met behulp van een wiskundige transformatie. Het lijkt of deze binnenrand ook een cirkel is. In deze opgave toon je met behulp van CAS aan dat de binnenrand inderdaad een cirkel is.

Een punt op de binnenrand ontstaat op de volgende manier uit een punt op de buitenrand:

- De lijn met vergelijking $y = ax$ snijdt voor $a \neq 1$ de cirkel in de oorsprong O en in een tweede punt A op de buitenrand. Bereken de coördinaten van A.
- Vermenigvuldig beide coördinaten van A met $\frac{4}{7}$. Dit geeft de coördinaten van een punt B op de binnenrand.

In figuur 2 zijn voor een waarde van a de lijn en de twee punten weergegeven.

figuur 2



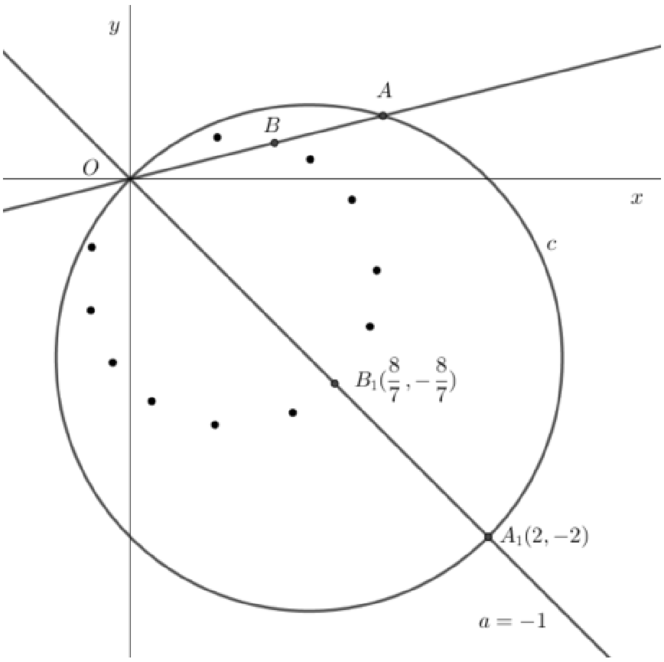
De coördinaten van een punt B op de binnenrand zijn afhankelijk van a.
Er geldt:

$$x_B = \frac{-8a+8}{7a^2+7}$$

4p **1** Toon met behulp van CAS aan dat inderdaad $x_B = \frac{-8a+8}{7a^2+7}$.

Wanneer je de waarde van a varieert, dan veranderen de posities van A en B.
In figuur 3 is voor twee waarden van a, waaronder $a = -1$, de lijn met vergelijking $y = ax$ getekend.
Voor $a = -1$ snijdt de lijn met vergelijking $y = -x$ de cirkel in $(0,0)$ en $(2,-2)$.
$A_1(2,-2)$ ligt op de buitenrand en $B_1(\frac{8}{7},-\frac{8}{7})$ is het bijbehorende punt op de binnenrand.
Ook voor een aantal andere waarden van a is het bijbehorende punt op de binnenrand met een stip aangegeven.

figuur 3



Er geldt dat de stippen op de binnenrand op een cirkel liggen met middellijn OB_1. Dit is zo omdat de afstand van elke stip op de binnenrand tot het midden van lijnstuk OB_1 constant is.

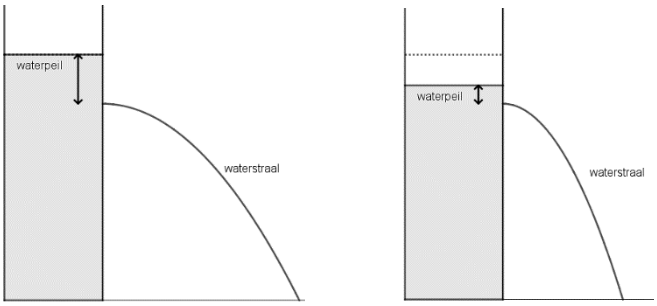
4p **2** Toon met behulp van CAS aan dat inderdaad de afstand van elke stip op de binnenring tot het midden van lijnstuk OB_1 constant is.

De boog van een waterstraal

Als in een gevulde regenton onder het waterpeil een gaatje wordt geprikt, spuit het water er in een boogje uit. Hierdoor daalt het waterpeil en verandert de vorm van de boog. De boog die de waterstraal beschrijft is afhankelijk van:
- de afstand van het gaatje tot het waterpeil in de ton en
- de afstand van het gaatje tot de bodem van de ton.

In figuur 1 zijn voor een gaatje op een bepaalde hoogte twee situaties getekend, waarbij de afstand van het gaatje tot het waterpeil van links naar rechts afneemt. De plaats waar de waterstraal de grond bereikt neemt tijdens het leeglopen voortdurend af.

figuur 1



In deze opgave bekijken we een cilindervormige regenton waarin het waterpeil zich 1 meter boven de bodem van de regenton bevindt. De afstand van het gaatje tot het waterpeil is d. Verder bekijken we alleen de boog van de waterstraal direct na het prikken van het gaatje.

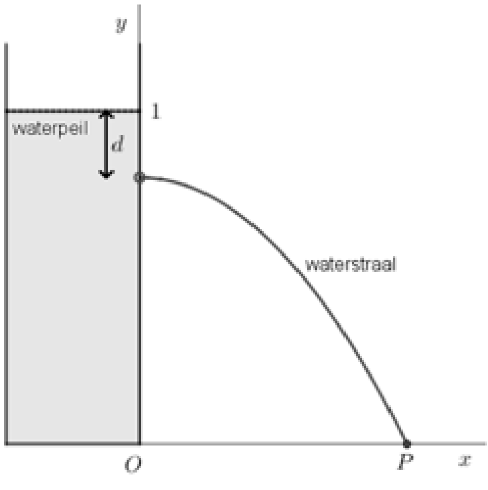
De regenton plaatsen we in een assenstelsel zodanig, dat de bodem samenvalt met de x-as en de rechterzijkant met de y-as. De eenheid op beide assen is de meter. In figuur 2 is deze situatie weergegeven. In die figuur is ook de boog van de waterstraal direct na het prikken van het gaatje te zien. Deze boog komt op de grond in punt P.

De getekende boog van de waterstraal is een deel van een parabool. De vergelijking van deze parabool is:

$$y = -\frac{1}{4d} \cdot x^2 + 1 - d$$

De y-coördinaat van P is 0. De x-coördinaat van P is afhankelijk van d. Er is een waarde van d waarvoor de x-coördinaat van P maximaal is.
Deze maximale x-coördinaat kan worden bepaald met behulp van een formule waarbij x is uitgedrukt in d.

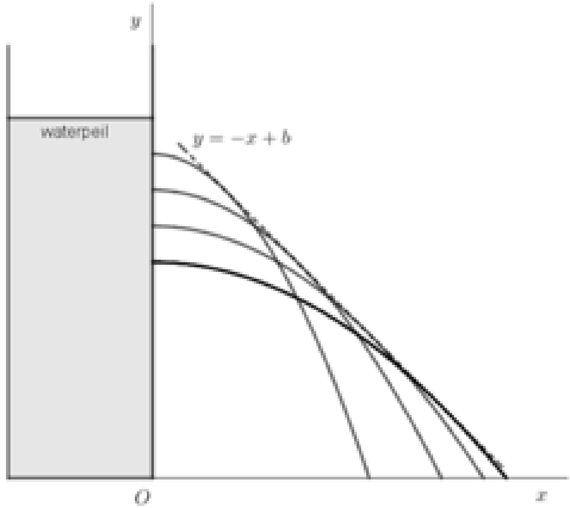
figuur 2



5p 3 Bepaal met behulp van CAS de maximale x-coördinaat van P.

In figuur 3 is voor een aantal waarden van d de boog van de waterstraal direct na het prikken van het gaatje getekend.

figuur 3



Ook is een deel van een lijn getekend. Deze lijn begrenst het gebied waar water kan komen als op een bepaalde hoogte een gaatje in de ton wordt geprikt.

De weergegeven lijn heeft een vergelijking van de vorm $y = -x + b$. De lijn raakt elke boog. Zo ook de boog die ontstaat als 25 cm onder de waterspiegel een gaatje wordt geprikt. De waarde van b in de vergelijking van de raaklijn kan worden gevonden met behulp van een vergelijking van deze boog.

5p **4** Bepaal met behulp van CAS de waarde van b.

Een cirkelboog en een raaklijn

De functie f is gegeven door $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. De grafiek van f is een halve cirkel met beginpunt $(-1,0)$ en eindpunt $(1,0)$.

Op de grafiek van f ligt een bewegend punt P met x-coördinaat p, met $-1<p<1$.

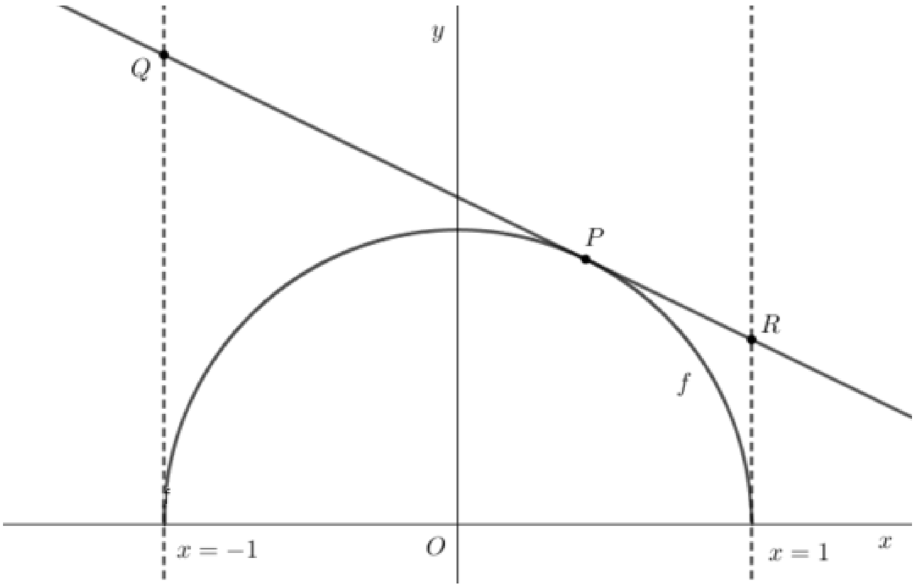
De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in P is van de vorm:

$$y=f'(p)(x-p)+f(p)$$

Deze raaklijn snijdt de verticale lijn met vergelijking $x=-1$ in punt Q en de verticale lijn met vergelijking $x=1$ in punt R.

In figuur 1 is deze situatie voor een waarde van p weergegeven.

figuur 1



De y-coördinaten van Q en R zijn afhankelijk van p.
Er geldt: het product van de y-coördinaten van Q en R is gelijk aan 1.

3p **5** Toon dit aan met behulp van CAS.

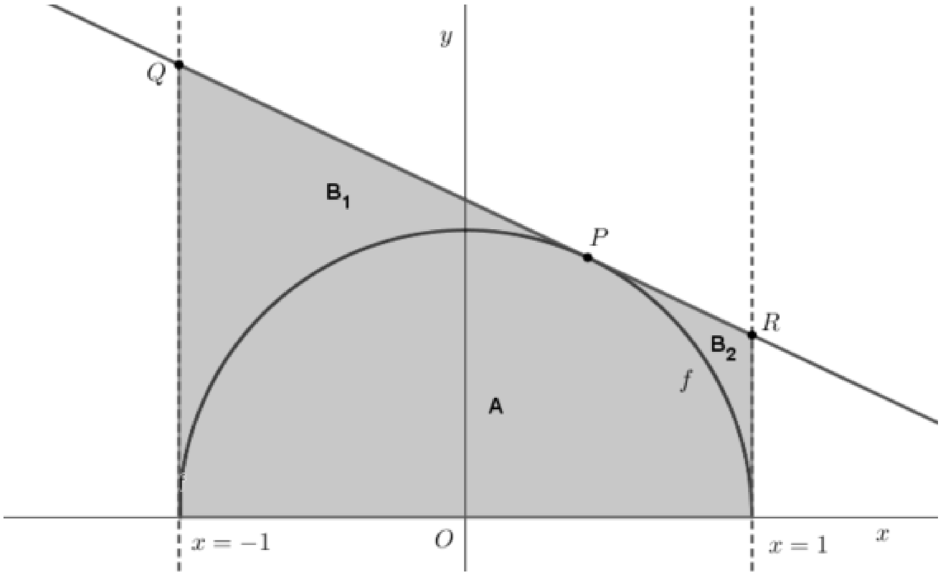
De y-coördinaat van Q is gelijk aan $\dfrac{1+p}{\sqrt{1-p^2}}$.

De lengte van lijnstuk PQ is afhankelijk van p. Voor een waarde van p is de lengte van lijnstuk PQ gelijk aan de omtrek van de halve cirkel.

3p **6** Bereken met behulp van CAS deze waarde van p. Geef als eindantwoord de exacte waarde die CAS geeft.

In figuur 2 is een vierhoek getekend met hoekpunten $(-1,0)$, $(1,0)$, R en Q.

figuur 2



De oppervlakte van de vierhoek kan worden berekend door de vierhoek te verdelen in twee delen: twee driehoeken of een driehoek en een rechthoek.

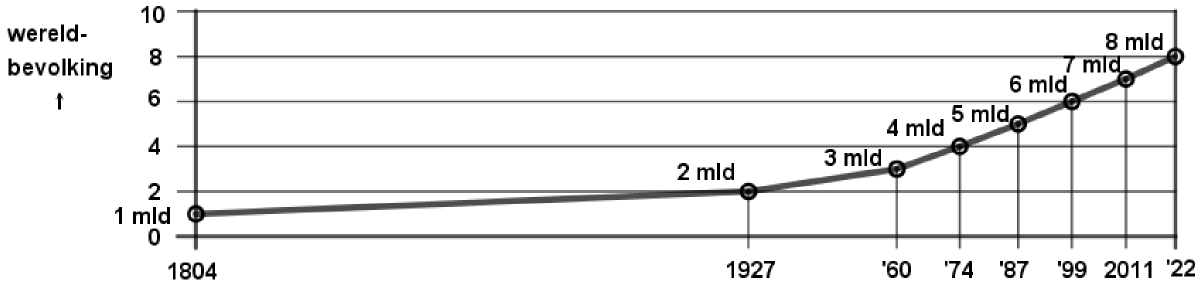
De halve cirkel verdeelt de vierhoek in drie delen. Deel **A** is het deel van de vierhoek dat binnen de halve cirkel ligt. De delen **B**$_1$ en **B**$_2$ vormen samen het deel van de vierhoek dat buiten de halve cirkel ligt. De oppervlakte van de delen **B**$_1$ en **B**$_2$ samen is afhankelijk van p.

4p **7** Onderzoek met behulp van CAS of er een waarde van p is, waarvoor geldt dat de oppervlakte van deel **A** vier keer zo groot is als de oppervlakte van de delen **B**$_1$ en **B**$_2$ samen.

Wereldbevolking

In 2022 werd de acht miljardste wereldburger geboren. In figuur 1 staat een lijndiagram, waarin telkens het jaartal weergegeven is waarin de miljardste, de twee miljardste, de drie miljardste enz. wereldburger geboren werd.

figuur 1



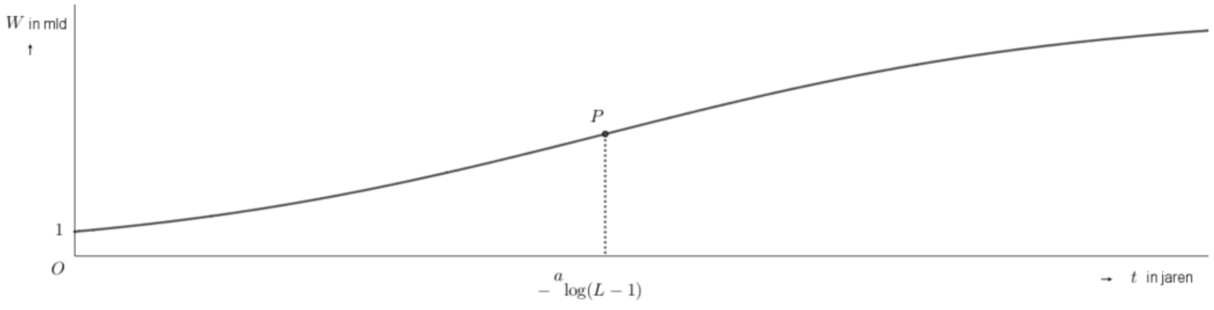
Sophie maakt een wiskundig model waarin de grootte van de wereldbevolking wordt benaderd door een formule. Een van de uitgangspunten in dat model is dat er een grenswaarde is voor de grootte van de wereldbevolking. De formule is van de vorm:

$$W = \frac{L}{1+(L-1)\cdot a^t} \qquad \text{(model 1)}$$

Hierbij is:
- W de wereldbevolking in miljarden,
- t de tijd in jaren na 1804,
- a een constante tussen 0 en 1 en
- L de grenswaarde waar W op den duur naartoe zal groeien.

In figuur 2 is voor een waarde van a en van L de grafiek van W weergegeven.

figuur 2



In de grafiek is het punt P aangegeven met t-coördinaat $-{}^{a}\log(L-1)$.
Er geldt: in P is de grootte van de wereldbevolking gelijk aan de helft van de grenswaarde L.

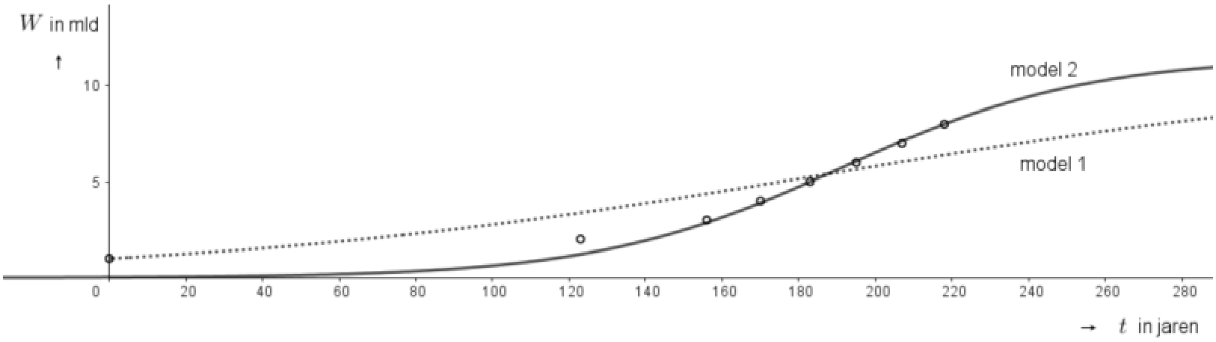
3p **8** Toon dit aan met behulp van CAS.

Sophie gaat ervan uit dat punt P bij het jaar 1991 hoort. Het aantal inwoners in dat jaar is 5,4 miljard.
Met behulp van deze gegevens bepaalt ze de waarde van L en van a. Vervolgens schat ze met deze waarden de omvang van de wereldbevolking in 2030.

4p **9** Bereken met behulp van CAS welke geschatte waarde Sophie vindt. Geef je eindantwoord in miljarden in één decimaal.

In figuur 3 zijn de meetpunten uit figuur 1 en de grafiek van model 1 weergegeven. Deze gestippelde grafiek lijkt niet zo'n goede benadering van de werkelijkheid. Sophie is daarom niet tevreden en stelt een tweede model op. De grafiek die bij model 2 hoort is ook in figuur 3 weergegeven

figuur 3



Bij model 2 hoort een formule van de vorm:

$$W = \frac{11{,}5}{1 + p \cdot q^t} \qquad \text{(model 2)}$$

Hierbij is:
- W de wereldbevolking in miljarden,
- t de tijd in jaren na 1804,
- p een positieve constante en
- q een constante tussen 0 en 1.

Uitgaande van de getekende punten $(183,5)$ en $(218,8)$ bepaalt Sophie de waarde van p en van q.

2p **10** Bereken met behulp van CAS deze waarde van p en van q. Geef je eindantwoorden in drie decimalen.

Prototype Examen HAVO

Opgaven

Deel zonder hulpmiddelen — wiskunde B

Dit deel van het examen bestaat uit 8 vragen. Voor dit deel van het examen zijn maximaal 37 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd.
Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Twee functies (2023-1)

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 2 \cdot 2^{x-3} - 4$.

Het is mogelijk de grafiek van f door middel van transformaties te laten ontstaan uit de grafiek die hoort bij de formule $y = 2^x$. Dit kan op verschillende manieren.
Er is een manier die alleen gebruikmaakt van translaties, dus **zonder** vermenigvuldigingen ten opzichte van x-as of y-as.

3p **11** Bewijs dat er zo'n manier is. In je antwoord moeten de translaties worden genoemd.

Op de grafiek van f ligt een punt met y-coördinaat 10.

4p **12** Bereken exact de x-coördinaat van dit punt.

De functie g wordt gegeven door $g(x) = -2^{x-3} + 2$.
Het punt S is het snijpunt van de grafieken van f en g.

4p **13** Bereken exact de coördinaten van S.

Parabool en grafiek van een wortelfunctie (2023-1)

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 2\sqrt{3x-5}$.

3p **14** Bereken op exacte wijze het domein van f.

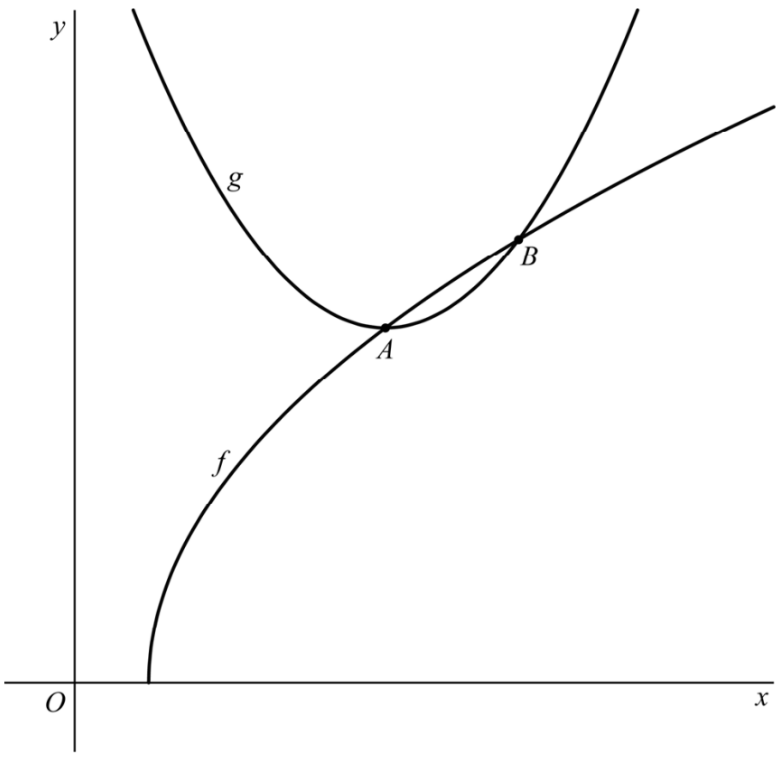
De functie g wordt gegeven door:

$$g(x) = a(x-p)^2 + q$$

Hierin zijn a, p en q constanten.
De grafiek van g is een parabool.

Het punt A ligt op de grafiek van f en in dit punt A geldt $f'(x) = \frac{3}{4}$.
Daarnaast is punt A ook de top van de grafiek van g.
Het punt B ligt op beide grafieken en heeft x-coördinaat 10.
Zie de figuur.

figuur



8p **15** Bereken exact de waarden van a, p en q.

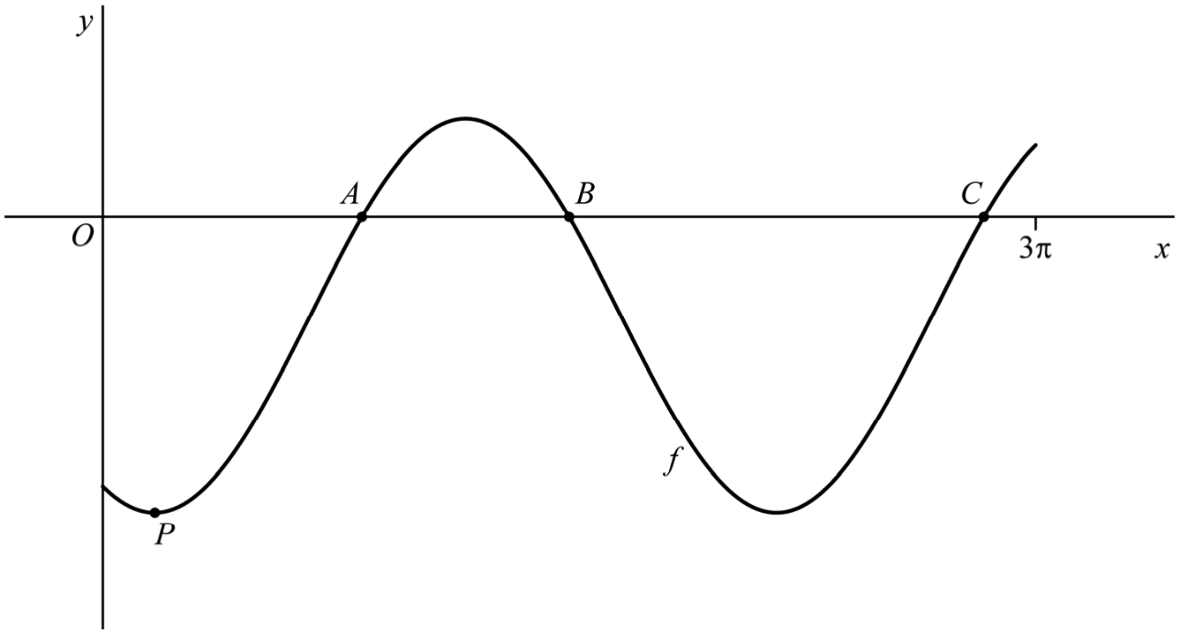
Drie snijpunten (2021-2)

Op het domein $[0, 3\pi]$ wordt de functie f gegeven door

$$f(x) = -1 + 2\sin\left(x - \tfrac{2}{3}\pi\right)$$

Op het gegeven domein is het punt P de eerste top rechts van de y-as van de grafiek van f. Zie de figuur.

figuur



4p **16** Bereken exact de coördinaten van P.

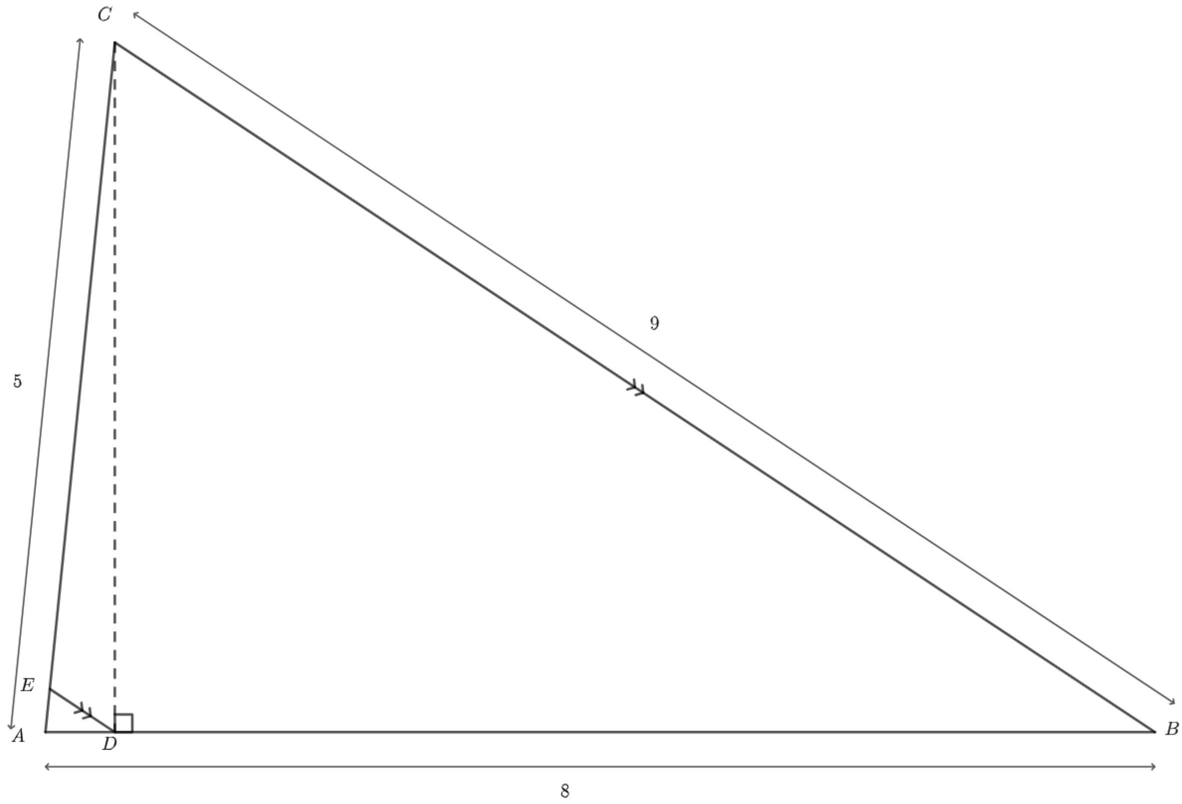
De punten A, B en C zijn de drie snijpunten van de grafiek van f met de x-as.
Lijnstuk BC is a keer zo lang als lijnstuk AB.

5p **17** Bereken exact de waarde van a.

Hoe lang is DE? (2019-2, bewerkt)

Gegeven is driehoek ABC met $AB = 8$, $BC = 9$ en $AC = 5$.
Het punt D ligt op zijde AB, zo dat lijnstuk CD loodrecht op zijde AB staat. Het punt E ligt op zijde AC, zo dat lijnstuk DE evenwijdig is met zijde BC.
Zie de figuur.

figuur



6p **18** Bereken exact de lengte van lijnstuk DE.

Prototype Examen HAVO

Correctievoorschrift

Deel met CAS **wiskunde B**

Buitenrand en binnenrand

1 maximumscore 4

1	x^2+y^2-2x+2y=0 $\rightarrow\ x^2+y^2-2x+2y=0$	
2	Vervangen($1, y, a x) $\rightarrow\ a^2x^2+x^2+2ax-2x=0$	1
3	Oplossen($2, x) $\rightarrow\ \left\{x=\frac{-2a+2}{a^2+1}, x=0\right\}$	1
4	xA:=Rechterlid(Element($3, 1)) $\rightarrow\ xA := \frac{-2a+2}{a^2+1}$	1
5	xB:=4 / 7 xA $\rightarrow\ xB := \frac{-8a+8}{7a^2+7}$	1

2 maximumscore 4

6	f(x):=a x $\rightarrow\ f(x) := a\,x$	
7	yB:=(4/7) f(xA) $\rightarrow\ yB := \frac{-8a^2+8a}{7a^2+7}$	1
8	MiddenOQ:=(4/7,-4/7) $\rightarrow\ MiddenOQ := \left(\frac{4}{7}, \frac{-4}{7}\right)$	1
9	Afstand((xB,yB),MiddenOQ) $\rightarrow\ \sqrt{\frac{16}{49}}\sqrt{\left(-1+\frac{1}{7}\cdot\frac{-14a+14}{a^2+1}\right)^2+\left(\frac{1}{7}\cdot\frac{-14a^2+14a}{a^2+1}+1\right)^2}$	1
10	Vereenvoudig($9) $\rightarrow\ 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{7}$	1

De boog van een waterstraal

3 maximumscore 5

- In de vergelijking $0 = -\frac{1}{4d} \cdot x^2 + 1 - d$ moet x worden vrijgemaakt 1

1	Oplossen(-1/(4d) x^2+1-d,x) $\rightarrow \left\{x = -2\sqrt{-d^2+d}, x = 2\sqrt{-d^2+d}\right\}$

- 1

2	xP:=Rechterlid(Element($1, 2)) $\rightarrow$ $xP := 2\sqrt{-d^2+d}$

- 1

3	Afgeleide($2) $\rightarrow \frac{-2d+1}{\sqrt{-d^2+d}}$

- 1

4	Oplossen((-2 d + 1) / sqrt(-d² + d)) $\rightarrow \left\{d = \frac{1}{2}\right\}$

- 1

5	Vervangen(xP, $4) $\rightarrow 1$

4 maximumscore 5

- Een vergelijking van de parabool is $y = -x^2 + \frac{3}{4}$ 1
- De vergelijking $-x^2 + \frac{3}{4} = -x + b$ moet één oplossing hebben 1
- 1

1	Oplossen(-x^2+3/4+x-b,x) $\rightarrow \left\{x = \frac{-2\sqrt{-b+1}+1}{2}, x = \frac{2\sqrt{-b+1}+1}{2}\right\}$

- Er is één oplossing als $2\sqrt{-b+1} = 0$ (of als $D = 0$) 1
- Dit geeft $b = 1$ 1

Een cirkelboog en een raaklijn

5 maximumscore 3

1	f(x):=sqrt(1-x^2) → $f(x) := \sqrt{-x^2+1}$
2	Afgeleide(f) → $\dfrac{-x}{\sqrt{-x^2+1}}$
3	l(x):=f'(p)(x-p)+f(p) → $l(x) := \dfrac{-(p\,x-1)}{\sqrt{-p^2+1}}$
4	l(1)*l(-1) → 1

- • (regel 2) 1
- • (regel 3) 1
- • (regel 4) 1

6 maximumscore 3

- De lengte van de halve cirkelboog is gelijk aan π 1

5	Afstand((-1,l(-1)),(p,f(p))) → $\sqrt{(-p-1)^2+\left(-\sqrt{-p^2+1}+\dfrac{p+1}{\sqrt{-p^2+1}}\right)^2}$
6	Oplossen($5 = π) → $\left\{p=\dfrac{\pi^2-1}{\pi^2+1}\right\}$

- • (regel 5) 1
- • (regel 6) 1

7 maximumscore 4

- De oppervlakte van de vierhoek is $\frac{1}{2}\cdot y_Q\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot y_R\cdot 2=y_Q+y_R$ 1
- De oppervlakte van **A** is $\frac{1}{2}\pi$, dus de oppervlakte van **B**$_1$ en **B**$_2$ moet $\frac{1}{8}\pi$ zijn 1

1	yQ:=(1+p)/sqrt(1+p^2) → $yQ := \dfrac{p+1}{\sqrt{p^2+1}}$
2	yR:= 1 / yQ → $yR := \dfrac{\sqrt{p^2+1}}{p+1}$
3	Oplossen($1 + $2 = π / 2 + π / 8) → {}

- • 1
- Er is dus geen waarde van p waarvoor de genoemde eigenschap geldt 1

Wereldbevolking

8 maximumscore 3

- Er moet gelden: $W(-{}^{a}\log(L-1)) = \frac{1}{2}L$ 1

1	W(t):=L/(1+(L-1)*a^t) $\rightarrow$ $\mathbf{W(t) := \frac{L}{a^t\,(L-1)+1}}$
2	W(-log(a,L-1)) $\rightarrow$ $\mathbf{\frac{L}{a^{\frac{-\ln(L-1)}{\ln(a)}}\,(L-1)+1}}$
3	Vereenvoudig($2) $\rightarrow$ $\mathbf{\frac{L}{2}}$

- (regel 2) 1
- (regel 3) 1

9 maximumscore 4

- $L = 10{,}8$ en $W(187) = 5{,}4$ 1
- De vergelijking $\frac{10{,}8}{1+9{,}8\cdot a^{187}} = 5{,}4$ moet worden opgelost 1
- 1

1	Oplossen(10.8 / (1 + 9.8a^187)=5.4) $\approx$ $\{\mathbf{a = 0.988}\}$

- 1

2	10.8 / (1 + 9.8*0.9878689285959^226) $\approx$ **6.7**

10 maximumscore 2

- Het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} \frac{11{,}5}{1+p\cdot q^{183}} = 5 \\ \frac{11{,}5}{1+p\cdot q^{218}} = 8 \end{cases}$ moet worden opgelost 1
- 1

1	NOplossen({11.5/(1+p*q^183)=5,11.5/(1+p*q^218)=8}, {p,q}) $\approx$ $\{\mathbf{p = 386.257, q = 0.969}\}$

Twee functies

11 maximumscore 3

- $f(x) = 2^1 \cdot 2^{x-3} - 4 = 2^{x-2} - 4$ 1
- Translatie 2 naar rechts 1
- Translatie 4 omlaag 1

of

- Een translatie 3 naar rechts en een translatie 4 omlaag geeft $y = 2^{x-3} - 4$ 1
- Vervolgens een translatie 1 naar links geeft $y = 2^{x-3+1} - 4$ 1
- Dit is gelijk aan $y = 2 \cdot 2^{x-3} - 4 = f(x)$ (dus translatie 3 naar rechts, translatie 4 omlaag en translatie 1 naar links) 1

12 maximumscore 4

- Uit $2 \cdot 2^{x-3} - 4 = 10$ volgt $2 \cdot 2^{x-3} = 14$ 1
- Dus $2^{x-3} = 7$ 1
- Hieruit volgt $x - 3 = {}^2\log(7)$ 1
- Dus $x = {}^2\log(7) + 3$ 1

of

- Uit $2 \cdot 2^{x-3} - 4 = 10$ volgt $2 \cdot 2^{x-3} = 14$ 1
- Dus $2^{x-2} = 14$ 1
- Hieruit volgt $x - 2 = {}^2\log(14)$ 1
- Dus $x = {}^2\log(14) + 2$ 1

of

- Uit $2 \cdot 2^{x-3} - 4 = 10$ volgt $2 \cdot 2^{x-3} = 14$ 1
- Dit geeft $2 \cdot 2^x \cdot 2^{-3} = 14$, dus $\frac{1}{4} \cdot 2^x = 14$ 1
- Hieruit volgt $2^x = 56$ 1
- Dus $x = {}^2\log(56)$ 1

13 maximumscore 4

- Uit $2\cdot 2^{x-3}-4=-2^{x-3}+2$ volgt $2\cdot 2^{x-3}+2^{x-3}=6$ 1
- Dit geeft $3\cdot 2^{x-3}=6$, dus $2^{x-3}=2$ 1
- Hieruit volgt $x-3=1$, dus $x=4$ 1
- $f(4)=0$, dus $S(4, 0)$ 1

of

- Uit $2\cdot 2^{x-3}-4=-2^{x-3}+2$ volgt $2\cdot 2^{x-3}+2^{x-3}=6$ 1
- Dus $2^x\left(2\cdot 2^{-3}+2^{-3}\right)=6$ 1
- Hieruit volgt $2^x=\dfrac{6}{2\cdot 2^{-3}+2^{-3}}=16$, dus $x=4$ 1
- $f(4)=0$, dus $S(4, 0)$ 1

of

- Uit $2^{x-2}-4=-2^{x-3}+2$ volgt $\frac{1}{4}\cdot 2^x+\frac{1}{8}\cdot 2^x=6$ 1
- Dus $\frac{3}{8}\cdot 2^x=6$ 1
- Hieruit volgt $2^x=16$, dus $x=4$ 1
- $f(4)=0$, dus $S(4, 0)$ 1

Parabool en grafiek van een wortelfunctie

14 maximumscore 3

- De vergelijking $3x-5=0$ moet worden opgelost 1
- Dit geeft $x=\frac{5}{3}$ 1
- (Voor $x\geq\frac{5}{3}$ is $3x-5\geq 0$, dus het domein van f is) $x\geq\frac{5}{3}$ 1

of

- De ongelijkheid $3x-5\geq 0$ moet worden opgelost 1
- $3x\geq 5$ 1
- Dus $x\geq\frac{5}{3}$ (dus dit is het domein van f) 1

15 maximumscore 8

- $f'(x)=\dfrac{2}{2\cdot\sqrt{3x-5}}\cdot 3\ \left(=\dfrac{3}{\sqrt{3x-5}}\right)$ 2
- $f'(x)=\frac{3}{4}$ geeft $\sqrt{3x-5}=4$ 1
- $3x-5=16$, dus $x=7$ 1
- De y-coördinaat van A is $f(7)=8$, dus $g(x)=a(x-7)^2+8$ 1
- $f(10)=10$, dus de y-coördinaat van B is 10 1
- (B ligt op de grafiek van g, dus) de vergelijking $10=a(10-7)^2+8$ moet worden opgelost 1
- Dit geeft $a=\frac{2}{9}$ (en $p=7$ en $q=8$) 1

Opmerking
Als in het eerste antwoordelement de kettingregel is gebruikt, maar niet correct, mag voor dit antwoordelement hoogstens 1 scorepunt worden toegekend op basis van vakspecifieke regel 1.

Drie snijpunten

16 maximumscore 4

- De x-coördinaat van het ‘beginpunt’ is $\frac{2}{3}\pi$ 1
- De periode van f is 2π 1
- Het eerste minimum is een kwart periode eerder dus de x-coördinaat van
- P is $\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\pi=\frac{1}{6}\pi$ 1
- De bijbehorende y-coördinaat is $(-1-2=)-3$ 1

of

- Uit $-1+2\sin\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)=-3$ volgt $\sin\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)=-1$ 1
- $x-\frac{2}{3}\pi=1\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$ 1
- $x=2\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi$ dus de x-coördinaat van P is $\frac{1}{6}\pi$ 1
- De bijbehorende y-coördinaat is $(-1-2=)-3$ 1

of

- De coördinaten van een top van $y=\sin(x)$ zijn $\left(-\frac{1}{2}\pi,-1\right)$ 1
- Verschuiving van $\frac{2}{3}\pi$ naar rechts levert de coördinaten $\left(\frac{1}{6}\pi,-1\right)$ van een top van $y=\sin\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)$ 1
- Vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met factor 2 levert de coördinaten $\left(\frac{1}{6}\pi,-2\right)$ van een top van $y=2\sin\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)$ 1
- Verschuiving van 1 naar beneden levert de coördinaten $\left(\frac{1}{6}\pi,-3\right)$ van P, top van $y=-1+2\sin\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)$ 1

17 maximumscore 5

- Uit $-1+2\sin\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)=0$ volgt $\sin\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}$ 1
- Dit geeft $x-\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi$ of $x-\frac{2}{3}\pi=\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi$ 1
- Hieruit volgt $x=\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi$ of $x=\frac{9}{6}\pi+k\cdot 2\pi$ 1
- De x-coördinaten van A, B en C zijn achtereenvolgens $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{9}{6}\pi$ en $2\frac{5}{6}\pi$ 1
- De gevraagde factor is $a=\dfrac{2\frac{5}{6}\pi-\frac{9}{6}\pi}{\frac{9}{6}\pi-\frac{5}{6}\pi}=2$ 1

of

- Uit $-1+2\sin\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)=0$ volgt $\sin\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}$ 1
- Dit geeft voor de x-coördinaat van A: $x-\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{6}\pi$ dus $x=\frac{5}{6}\pi$ 1
- Voor de x-coördinaat van de top tussen A en B geldt: $x=x_P+\pi=\frac{1}{6}\pi+\pi$
  dus de x-coördinaat van B is $1\frac{1}{6}\pi+\frac{2}{6}\pi=1\frac{1}{2}\pi$ 1
- De periode van f is 2π dus de x-coördinaat van C is $2\frac{5}{6}\pi$ 1
- De gevraagde factor is $a=\dfrac{2\frac{5}{6}\pi-1\frac{1}{2}\pi}{\frac{9}{6}\pi-\frac{5}{6}\pi}=2$ 1

Hoe lang is DE?

18 maximumscore 6

- Er geldt $9^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos(\angle A)$ 1
- Hieruit volgt $\cos(\angle A) = \dfrac{9^2 - 5^2 - 8^2}{-2 \cdot 5 \cdot 8}$ $(= \frac{1}{10})$ 1
- Er geldt $\cos(\angle A) = \dfrac{AD}{5}$ 1
- Hieruit volgt $AD = 5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$ 1
- Driehoek ADE is gelijkvormig met driehoek ABC 1
- $DE = \frac{\frac{1}{2}}{8} \cdot 9 = \frac{9}{16}$ 1

of

- Stel $AD = x$, dan geldt $CD^2 = 5^2 - x^2$ 1
- Ook geldt $CD^2 = 9^2 - (8 - x)^2$ 1
- Er geldt dus $5^2 - x^2 = 9^2 - (8 - x)^2$, dus $25 - x^2 = 81 - (64 - 16x + x^2)$ 1
- Hieruit volgt $8 = 16x$, dus ($AD =$) $x = \frac{1}{2}$ 1
- Driehoek ADE is gelijkvormig met driehoek ABC 1
- $DE = \dfrac{\frac{1}{2}}{8} \cdot 9 = \frac{9}{16}$ 1

Prototype Examen in twee delen VWO

Opgaven

Dit examen bestaat uit 15 vragen:

- 7 vragen in het CAS-deel
- 8 vragen in het deel zonder hulpmiddelen.

Voor dit examen zijn maximaal 78 punten te behalen:

- 39 punten voor het CAS-deel
- 39 punten voor het deel zonder hulpmiddelen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Prototype Examen in twee delen VWO

Opgaven

Deel met CAS — wiskunde B

Dit deel van het examen bestaat uit 7 vragen. Voor dit deel van het examen zijn maximaal 39 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

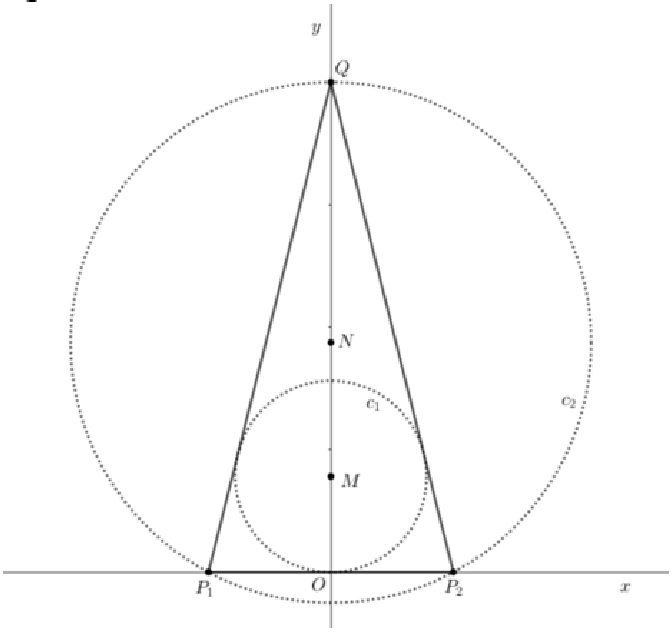
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd.
Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Driehoek met twee cirkels

Gegeven is driehoek P_1P_2Q met hoekpunten $P_1(-1,0)$, $P_2(1,0)$ en $Q(0,q)$, met $q>0$. De punten P_1 en P_2 liggen dus op de x-as en het punt Q ligt op de positieve y-as.
Cirkel c_1 raakt elke zijde van driehoek P_1P_2Q.
Cirkel c_2 gaat door elk hoekpunt van driehoek P_1P_2Q.
In de figuur zijn voor een waarde van q de driehoek en de twee cirkels weergegeven.

figuur



In deze figuur zijn ook de middelpunten $M(0,m)$ van c_1 en $N(0,n)$ van c_2 aangegeven.
Punt M heeft gelijke afstand tot elke zijde van de driehoek. Hieruit volgt:

$$m=\frac{-1+\sqrt{q^2+1}}{q}$$

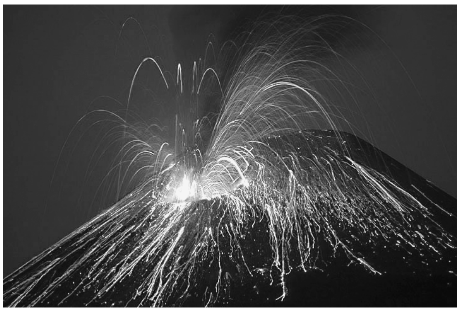
5p **1** Toon aan met behulp van CAS dat inderdaad $m=\dfrac{-1+\sqrt{q^2+1}}{q}$.

Punt N heeft gelijke afstand heeft tot elk hoekpunt van de driehoek. Met behulp van deze eigenschap kan ook de y-coördinaat n van N in q worden uitgedrukt.

De posities van M en N zijn afhankelijk van de positie van Q. De oppervlakte van beide cirkels is dus afhankelijk van q. Er is één waarde van q waarvoor geldt dat de oppervlakte van c_2 twee keer zo groot is als de oppervlakte van c_1.

5p **2** Bereken met behulp van CAS deze waarde van q. Geef als eindantwoord de exacte waarde die CAS geeft.

Vulkaan

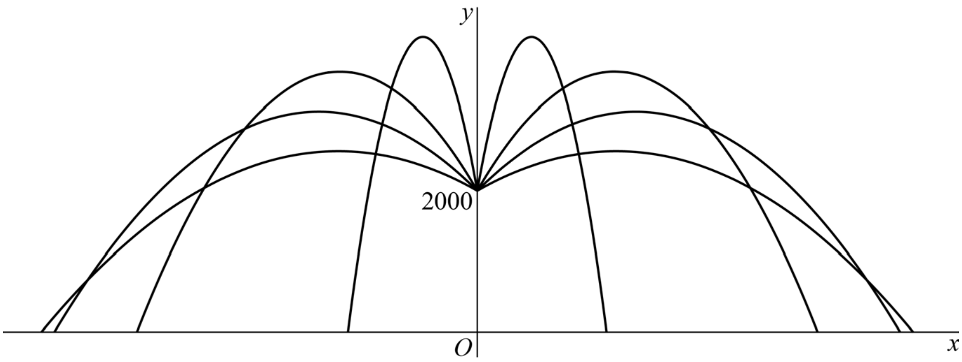


Een vulkaan kan op verschillende manieren tot uitbarsting komen. Bij een zogenoemde plinische uitbarsting wordt de druk binnen de vulkaan steeds groter totdat de vulkaan met groot geweld tot uitbarsting komt. Bij de uitbarsting worden brokken gesmolten steen weggeslingerd die lavabommen worden genoemd.

In een model van de baan van een lavabom wordt ervan uitgegaan dat op het moment van de uitbarsting alle lavabommen een snelheid hebben van 210 meter per seconde. Een tweede uitgangspunt is dat elke lavabom een parabolische baan beschrijft. De hoogte van de vulkaan ten opzichte van de grond is 2000 meter.

In de figuur zie je de banen van een aantal lavabommen die in het vlak door de x-as en de y-as bewegen.

figuur



De bewegingsvergelijkingen van een lavabom hangen af van de richting waarin de lavabom tijdens de uitbarsting wordt weggeslingerd. In het model worden de volgende bewegingsvergelijkingen als uitgangspunt genomen:

$$\begin{cases} x(t) = 210\cos(\alpha)\cdot t \\ y(t) = 2000 + 210\sin(\alpha)\cdot t - 4{,}9t^2 \end{cases}$$

Hierbij is α de hoek die de baan van de lavabom op het moment van wegslingeren maakt met een horizontale lijn, waarbij $0 < \alpha < \pi$. Verder is t de tijd in seconden (waarbij $t = 0$ het moment van wegslingeren is) en zijn $x(t)$ en $y(t)$ in meters.

Een lavabom treft de grond in een punt P met y-coördinaat 0.
Het tijdstip waarop de lavabom de grond treft is afhankelijk van α. Er geldt:

$$t = \frac{1}{7}\left(150\sin(\alpha) + 50\sqrt{9\sin^2(\alpha) + 8}\right)$$

Bewering: de snelheid waarmee een lavabom de grond in P treft is onafhankelijk van α.

4p **3** Onderzoek met behulp van CAS of deze bewering juist is.

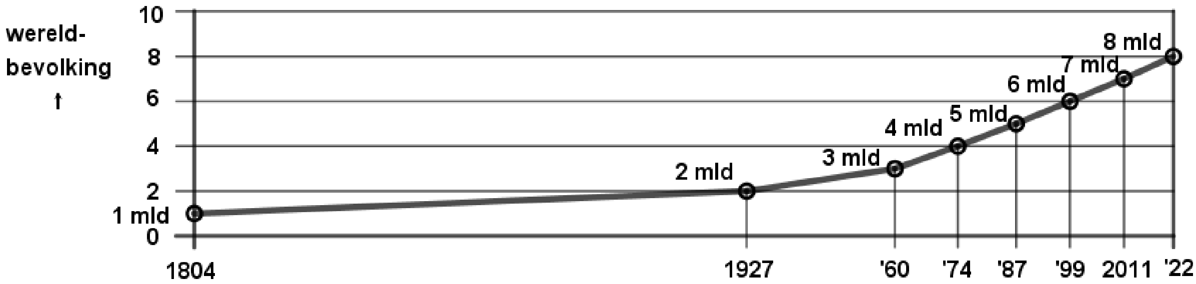
Voor een waarde van α is de x-coördinaat van P maximaal.

5p **4** Bepaal met behulp van CAS hoe ver vanaf de oorsprong een lavabom maximaal de grond treft. Geef je eindantwoord in gehele meters.

Wereldbevolking

In 2022 werd de acht miljardste wereldburger geboren. In figuur 1 staat een lijndiagram, waarin telkens het jaartal weergegeven is waarin de miljardste, de twee miljardste, de drie miljardste enz. wereldburger geboren werd.

figuur 1



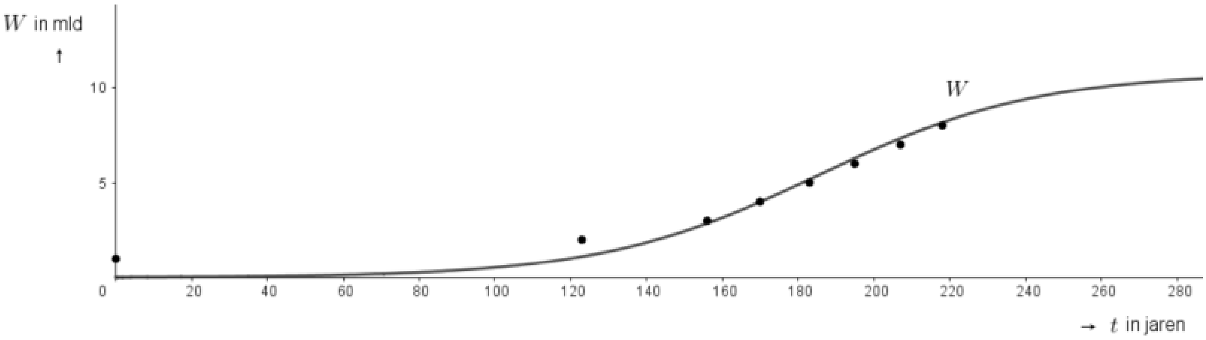
In een wiskundig model wordt de grootte van de wereldbevolking benaderd door een formule. Een van de eigenschappen van dit model is dat er een grenswaarde is voor de grootte van de wereldbevolking. De formule is van de vorm:

$$W = \frac{L}{1 + a \cdot b^t}$$

Hierbij is:
- W de wereldbevolking in miljarden;
- t de tijd in jaren na 1804;
- b een constante tussen 0 en 1;
- L de grenswaarde waar W op den duur naartoe zal groeien.

Een wiskundige heeft bij de gegevens uit figuur 1 een formule opgesteld van de vorm $W = \frac{L}{1 + a \cdot b^t}$. In figuur 2 zijn de gegevens uit figuur 1 met een stip aangegeven. ook is de grafiek van de door de wiskundige gevonden formule getekend.

figuur 2



Om de waarde van L, a en b te bepalen, heeft de wiskundige achtereenvolgens gebruik gemaakt van het volgende:

- een eigenschap van het model is dat er één moment is waarop de snelheid waarmee W stijgt maximaal is; (1)
- de bevolking groeide het snelst toen de grootte van de wereldbevolking 5,4 miljard was; (2)
- in 1987 was de grootte van de wereldbevolking 5 miljard en in 2022 was de grootte van de wereldbevolking 8 miljard. (3)

8p **5** Bepaal met behulp van CAS eerst de waarde van L en vervolgens van a en van b. Geef de waarde van a en van b in drie decimalen.

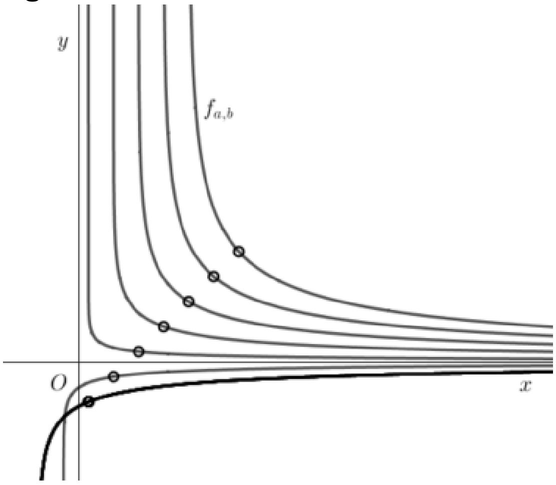
Op één lijn?

De functie $f_{a,b}$ wordt gegeven door $f_{a,b}(x)=\dfrac{a\cdot\ln(x-a)}{x-b}$, met $a\neq 0$, $b\neq 1$.

Er zijn waarden van a en b waarvoor de grafiek van $f_{a,b}$ een perforatie heeft.

In de figuur zijn een aantal mogelijke grafieken met de bijbehorende perforatie getekend.

figuur



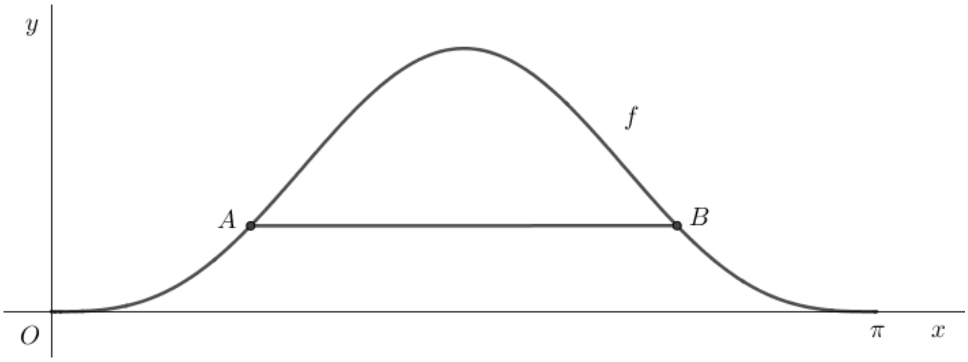
Het lijkt of de perforaties op één lijn liggen.

5p **6** Onderzoek met behulp van CAS of deze perforaties inderdaad op één lijn liggen.

Goniometrische functie

Voor $0 \le x \le \pi$ wordt de functie f gegeven door $f(x) = \sin^3(x)$.
Het begin- en eindpunt van de grafiek van f ligt op de x-as. De andere punten liggen boven de x-as.
V is het vlakdeel begrensd door de grafiek van f en de x-as. Op de grafiek van f liggen twee punten A en B met dezelfde y-coördinaat. Deze punten zijn zo gekozen dat lijnstuk AB het vlakdeel V in twee delen met gelijke oppervlakte verdeelt. Zie figuur.

figuur



7p **7** Bereken met behulp van CAS de lengte van lijnstuk AB. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Prototype Examen in twee delen VWO

Opgaven

Deel zonder hulpmiddelen wiskunde B

Dit deel van het examen bestaat uit 8 vragen. Voor dit deel van het examen zijn maximaal 39 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

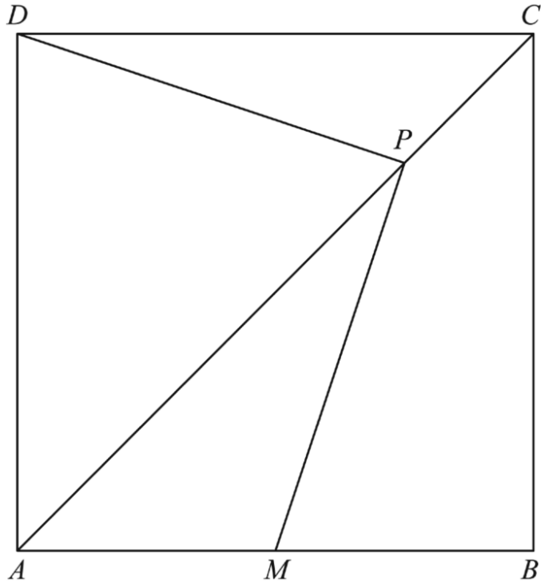
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd.
Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Op de diagonaal van een vierkant (2022-2)

Gegeven is een vierkant $ABCD$ met zijde 2. Punt M is het midden van lijnstuk AB. Punt P ligt op diagonaal AC en valt niet samen met punt A of punt C. Zie de figuur.

figuur



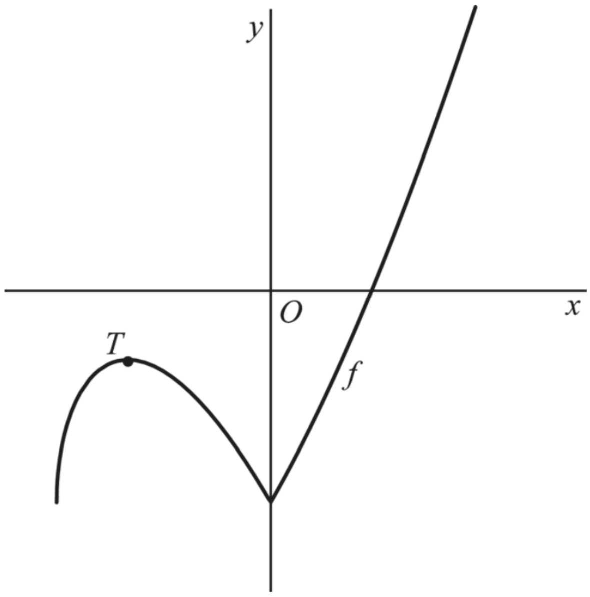
P kan zo worden gekozen dat de lijnstukken DP en MP loodrecht op elkaar staan.

6p **8** Bereken exact de lengte van lijnstuk AP in deze situatie.

Absolute waarde en wortelfunctie (2023-2)

De functie f wordt gegeven door $f(x) = -3 + |x| \cdot \sqrt{x+3}$ met $x \geq -3$.
De grafiek van f heeft links van de y-as een top T. Zie figuur 1.

figuur 1



5p **9** Bereken exact de x-coördinaat van punt T.

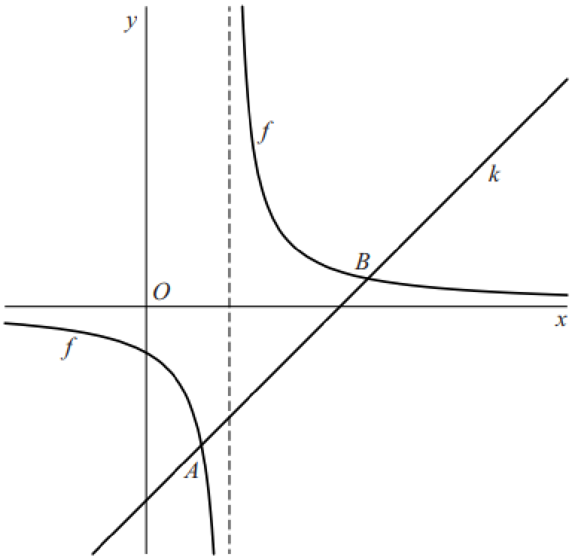
Een gebroken functie (2017-1 pilot)

De functie f wordt gegeven door:

$$f(x) = \frac{5}{4x-6}$$

De lijn k met vergelijking $y = x - 3\frac{1}{2}$ snijdt de grafiek van f in twee punten, A en B. Zie figuur 1.
De coördinaten van punt A zijn $(1, -2\frac{1}{2})$.

figuur 1

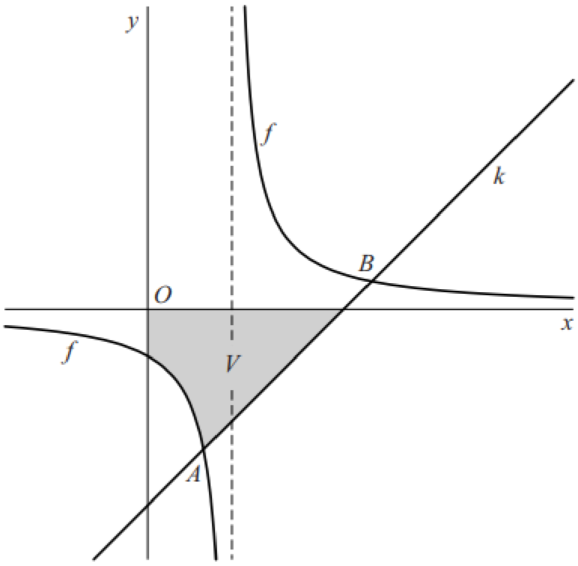


4p **10** Bereken exact de coördinaten van punt B.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn k. In figuur 2 is dit vlakdeel grijs gemaakt.
V wordt gewenteld om de x-as. Zo ontstaat een omwentelingslichaam.

5p **11** Bereken exact de inhoud van dit omwentelingslichaam.

figuur 2



De grafiek van f wordt a eenheden naar boven verschoven. Zo ontstaat de grafiek van een functie g. De waarde van a kan zowel positief als negatief zijn.
De functie g heeft een inverse functie. De grafiek van de inverse functie van g heeft één verticale asymptoot. Ook de grafiek van g heeft een verticale asymptoot. Gegeven is, dat de afstand tussen deze twee verticale asymptoten gelijk is aan 4.

4p **12** Bereken exact de mogelijke waarden van a.

Gebroken goniometrische functie (2019-1)

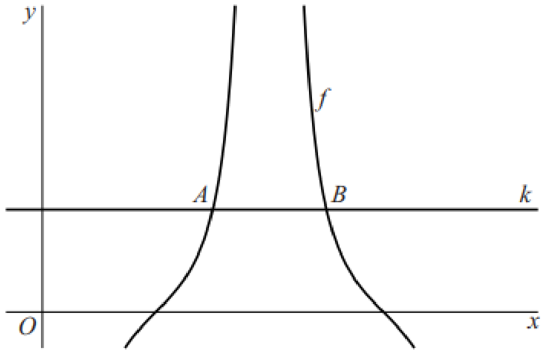
De functie f wordt gegeven door:

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{-\sin^2(x)}$$

Lijn k is de lijn met vergelijking $y = \sqrt{2}$.

Lijn k en de grafiek van f hebben oneindig veel snijpunten. De punten A en B zijn de twee snijpunten met de kleinste positieve x-coördinaten. Deze zijn in figuur 1 aangegeven.

figuur 1



6p **13** Bereken exact de x-coördinaten van A en B.

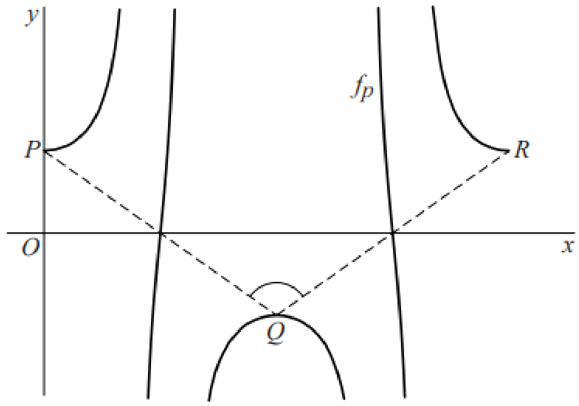
In de rest van de opgave beperken we ons tot waarden van p waarvoor geldt: $p \neq 0$

De punten op de grafiek van f_p met x-coördinaten 0, π en 2π noemen we respectievelijk P, Q en R.

In figuur 2 is voor een waarde van p de grafiek van f_p weergegeven.

Ook zijn de lijnstukken PQ en QR weergegeven.

figuur 2



Er zijn waarden van p waarvoor PQ en QR loodrecht op elkaar staan.

4p **14** Bereken exact deze waarden van p.

Twee punten op een grafiek (2022-2)

De functie f wordt gegeven door $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^x$.
De punten P en Q liggen op de grafiek van f.
De x-coördinaat van P is p en de x-coördinaat van Q is $2p$.

Voor een bepaalde waarde van p heeft de lijn door P en Q een richtingscoëfficiënt van 6.

5p **15** Bereken exact deze waarde van p.

Onderdeel van CITO

Prototype Examen VWO

Correctievoorschrift

Deel met CAS **wiskunde B**

Driehoek met twee cirkels

1 maximumscore 5

- 1 y=q*x+q
  $\rightarrow\ y = q\,x + q$ — 1
- 2 Afstand((0,m), y=-q*x+q)
  $\rightarrow\ \sqrt{\dfrac{(-m+q)^2}{(-q)^2+1}}$ — 1
- Deze afstand moet gelijk zijn aan m — 1
- 3 Oplossen($2 = m, m)
  $\rightarrow\ \left\{m = \dfrac{-\sqrt{q^2+1}-1}{q}, m = \dfrac{\sqrt{q^2+1}-1}{q}\right\}$ — 1
- Een toelichting waaruit volgt dat $m = \dfrac{-\sqrt{q^2+1}-1}{q}$ niet voldoet — 1

2 maximumscore 5

- $d(N,Q) = d(N,P_1)$ geeft $q - n = \sqrt{1+n^2}$ — 1
- 4 Oplossen(q-n=sqrt(1+n^2),n)
  $\rightarrow\ \left\{n = \dfrac{q^2-1}{2\,q}\right\}$ — 1
- Er moet gelden: $n = \sqrt{2}\cdot m$ — 1

5 yM:=Rechterlid(Element($3, 2))
$\rightarrow\ yM := \dfrac{\sqrt{q^2+1}-1}{q}$

6 yN:=Rechterlid(Element($4, 1))
$\rightarrow\ yN := \dfrac{q^2-1}{2\,q}$

- 7 Oplossen(yN=sqrt(2)*yM)
  $\rightarrow\ \left\{q = -\sqrt{4\sqrt{-\sqrt{2}+2}-2\sqrt{2}+5}, q = \sqrt{4\sqrt{-\sqrt{2}+2}-2\sqrt{2}+5}\right\}$ — 1
- Dus $q = \sqrt{4\sqrt{-\sqrt{2}+2}-2\sqrt{2}+5}$ — 1

Vulkaan

3 maximumscore 4

	1	210*cos(α)*t $\rightarrow\ 210\, t\, \cos(\alpha)$	
	2	2000+210*sin(α)*t-4.9t^2 $\rightarrow\ 210\, t\, \sin(\alpha) - \frac{49}{10}\, t^2 + 2000$	
	3	t = (50 sqrt(9sin²(α) + 8) + 150sin(α)) / 7 $\rightarrow\ t = \frac{1}{7}\left(150\, \sin(\alpha) + 50\, \sqrt{9\, \sin^2(\alpha) + 8}\right)$	
•	4	sqrt(Afgeleide($1)² + Afgeleide($2)²) $\rightarrow\ \sqrt{\frac{49}{25}}\, \sqrt{22500\, \cos^2(\alpha) + (150\, \sin(\alpha) - 7\, t)^2}$	1
•	5	Vervangen($4, t, (50sqrt(9sin²(α) + 8) + 150sin(α)) / 7) $\rightarrow\ 70\, \sqrt{9\, \cos^2(\alpha) + 9\, \sin^2(\alpha) + 8}$	1
•	6	Vereenvoudig($5) $\rightarrow\ 70\, \sqrt{17}$	1

- Uit $6 volgt dat de bewering waar is 1

4 maximumscore 5

	1	210*cos(α)*t $\rightarrow\ 210\, t\, \cos(\alpha)$	
	2	t = (50 sqrt(9sin²(α) + 8) + 150sin(α)) / 7 $\rightarrow\ t = \frac{1}{7}\left(150\, \sin(\alpha) + 50\, \sqrt{9\, \sin^2(\alpha) + 8}\right)$	
•	3	Vervangen($1, t, 1 / 7 (150sin(α) + 50sqrt(9sin²(α) + 8))) $\rightarrow\ \cos(\alpha)\left(4500\, \sin(\alpha) + 1500\, \sqrt{9\, \sin^2(\alpha) + 8}\right)$	1
•	4	Afgeleide($3) $\rightarrow\ \cos(\alpha)\left(4500\, \cos(\alpha) + 13500\, \cos(\alpha)\, \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{9\, \sin^2(\alpha) + 8}}\right) - \sin(\alpha)\left(4500\, \sin(\alpha) + 1500\, \sqrt{9\, \sin^2(\alpha) + 8}\right)$	1
•	5	NOplossen($4) $\rightarrow\ \{\alpha = -488, \alpha = -364, \alpha = -362, \alpha = -288, \alpha = -186, \alpha = -169, \alpha = -148, \alpha = -131, \alpha = -129, \alpha =$	1

- Het gebruik van $\alpha = 0,62901...$ 1

•	6	Vervangen(cos(α) (4500sin(α) + 1500sqrt(9sin²(α) + 8)),α,0.62901) $\approx\ 6185$	1

Wereldbevolking

5 maximumscore 8

- Er moet gelden: $W''(t) = 0$ 1

1	W(t):=L/((1+a*b^t)) $\rightarrow\ W(t) := \dfrac{L}{a\,b^t + 1}$
2	W'(t):=Afgeleide(W(t),t) $\rightarrow\ W'(t) := -L\,a\,b^t \cdot \dfrac{\ln(b)}{(a\,b^t+1)^2}$
3	W''(t):=Afgeleide(W'(t), t) $\rightarrow\ W''(t) := -L\,a\,b^t \cdot \dfrac{(\ln(b))^2}{(a\,b^t+1)^2} + 2\,L\,a^2\,(b^t)^2 \cdot \dfrac{(\ln(b))^2}{(a\,b^t+1)^3}$
4	Oplossen(W''(t) = 0, t) $\rightarrow\ \left\{t = \dfrac{-\ln(a)}{\ln(b)}\right\}$
5	W(-ln(a) / ln(b)) $\rightarrow\ \dfrac{L}{a\,b^{\frac{-\ln(a)}{\ln(b)}} + 1}$
6	Vereenvoudig($5) $\rightarrow\ \dfrac{L}{2}$

- (regel 3) 1
- (regel 4) 1
- (regel 5) 1
- (regel 6) 1

- $\frac{1}{2}L = 5{,}4$, dus $L = 10{,}8$ 1
- Het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} \dfrac{10{,}8}{1 + a \cdot b^{183}} = 5 \\ \dfrac{10{,}8}{1 + a \cdot b^{218}} = 8 \end{cases}$ moet worden opgelost 1
- 7 NOplossen({10.8/(1+a*b^183)=5,10.8/(1+a*b^218)=8},{a,b})
 $\rightarrow\ \{a = 610.034, b = 0.966\}$ 1

Op één lijn?

6 maximumscore 5

- Voor de x-coördinaat van de perforatie moet gelden: $x-a=1$ én $x-b=0$ 1
- Als de grafiek een perforatie heeft dan moet gelden $b=a+1$, dus het functievoorschrift van $f_{a,b}$ moet van de vorm $f_{a,b}(x)=\dfrac{a\cdot\ln(x-a)}{x-a-1}$ zijn 1
- 1

1	f(x):=(a*ln(x-a))/(x-a-1) → $\mathbf{f(x) := -a\,\dfrac{\ln(-a+x)}{a-x+1}}$
2	Limiet($1, x, a + 1) → $\mathbf{a}$

- De coördinaten van de perforatie zijn $(a+1,a)$ 1
- De perforaties liggen op één lijn, want punten van de vorm $(a+1,a)$ liggen op de lijn met vergelijking $y=x-1$ 1

Goniometrische functie

7 maximumscore 7

- 1 `f(x):=(sin(x))^3`
  $\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := sin^3(x)}$
  2 `Integraal(f(x),x,0,pi)`
  $\rightarrow \frac{4}{3}$ **1**

Een toelichting waaruit volgt dat de grafiek van f (lijn)symmetrisch is in de lijn met vergelijking $x = \frac{1}{2}\pi$, bijvoorbeeld:

- 3 `f(pi/2+p)-f(pi/2-p)`
  $\rightarrow$ **0** **1**
- De helft van de oppervlakte van V is $(\pi - 2q)\cdot \sin^3(q) + 2\cdot\int_0^q (\sin^3(x))\,dx$

  (of $\int_q^{\pi-q} (\sin^3(x) - \sin^3(q))\,dx$), met q de x-coördinaat van A **1**
- 4 `2*Integraal(f(x),0,q)+(pi-2q)*f(q)`
  $\rightarrow \frac{2}{3}\left(-3\cos(q) + \cos^3(q) + 2\right) + \sin^3(q)\,(-2q + \pi)$ **1**
- 5 `NOplossen($4 = 2 / 3)`
  $\rightarrow \{q = -474.252, q = -395.7462, q = -348.5744, q = -288.9216, q =$ **1**
- De gezochte waarde van q is 0,7593… **1**
- 6 `AB:=pi-2*0.75935`
  $\approx$ $\mathbf{AB := 1.62}$ **1**

Op de diagonaal van een vierkant

8 **maximumscore 6**

- Voor het kiezen van een assenstelsel met bijbehorende coördinaten, bijvoorbeeld $A(0,0)$, $D(0,2)$ en $M(1,0)$ 1
- Punt P heeft coördinaten (p, p) (met $0 < p < 2$) 1
- $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} p-1 \\ p \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{DP} = \begin{pmatrix} p \\ p-2 \end{pmatrix}$ 1
- $\begin{pmatrix} p-1 \\ p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ p-2 \end{pmatrix} = 0$ 1
- $p^2 - p + p^2 - 2p = 0$ geeft $p = \frac{3}{2}$ ($p = 0$ voldoet niet) 1
- $AP = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

- Voor het kiezen van een assenstelsel met bijbehorende coördinaten, bijvoorbeeld $A(0,0)$, $D(0,2)$ en $M(1,0)$ 1
- Punt P heeft coördinaten (p, p) (met $0 < p < 2$) 1
- Lijn MP heeft rc $\dfrac{p}{p-1}$ (voor $p \neq 1$) en lijn DP heeft rc $\dfrac{p-2}{p}$ 1
- $\dfrac{p}{p-1} \cdot \dfrac{p-2}{p} = -1$ 1
- Hieruit volgt $p = \frac{3}{2}$ ($p = 0$ voldoet niet) 1
- $AP = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

- Voor het kiezen van een assenstelsel met bijbehorende coördinaten, bijvoorbeeld $A(0,0)$, $D(0,2)$ en $M(1,0)$ 1
- Als DP en MP loodrecht op elkaar staan, dan ligt P op de cirkel met middellijn MD 1
- (Dat is de cirkel met middelpunt $\left(\frac{1}{2},1\right)$ en straal $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{5}{4}}$, dus) een vergelijking van deze cirkel is $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$ 1
- Snijden met de lijn AP met vergelijking $y=x$ geeft $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(x-1)^2=\frac{5}{4}$, dus $2x^2-3x=0$ 1
- Dit geeft $x=\frac{3}{2}$ ($x=0$ voldoet niet) 1
- $AP=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

- Voor het kiezen van een assenstelsel met bijbehorende coördinaten, bijvoorbeeld $A(0,0)$, $D(0,2)$ en $M(1,0)$ 1
- Punt P heeft coördinaten (p,p) (met $0<p<2$) 1
- Een redenering waaruit volgt dat $\angle DPR=\angle PMQ$ (of $\angle RDP=\angle QPM$) (met R de loodrechte projectie van P op CD en Q de loodrechte projectie van P op AB) 1
- Ook geldt (omdat $D(0,2)$, $R(p,2)$, $P(p,p)$ en $Q(p,0)$) $DR=PQ$, dus $\Delta PRD\cong\Delta MQP$ 1
- $MQ=PR$ geeft $p-1=2-p$ ofwel $p=\frac{3}{2}$ 1
- $AP=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

- Een redenering waaruit volgt dat $\angle DPR = \angle PMQ$ (of $\angle RDP = \angle QPM$) (met R de loodrechte projectie van P op CD en Q de loodrechte projectie van P op AB) 1
- Ook geldt $DR = PQ$, dus $\Delta PRD \cong \Delta MQP$ 1
- Dus $MQ = PR$ en (omdat $\angle PCR = 45°$) $PR = RC$ 1
- Dus $MQ = PR = RC = BQ$ en dus is Q het midden van MB 1
- Hieruit volgt $AQ : QB = 3 : 1$ 1
- $AP = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ (want ΔAQP is gelijkvormig met ΔABC) (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

- Voor het kiezen van een assenstelsel met bijbehorende coördinaten, bijvoorbeeld $A(0, 0)$, $D(0, 2)$ en $M(1, 0)$ 1
- Punt P heeft coördinaten (p, p) (met $0 < p < 2$) 1
- $DP = \sqrt{p^2 + (2 - p)^2}$ en $MP = \sqrt{p^2 + (p - 1)^2}$ en $MD = \sqrt{5}$ 1
- $DP \perp MP$ als $p^2 + (2 - p)^2 + p^2 + (p - 1)^2 = 5$ 1
- Hieruit volgt $p = \frac{3}{2}$ ($p = 0$ voldoet niet) 1
- $AP = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

Absolute waarde en wortelfunctie

9 maximumscore 5

- ($x_T < 0$, dus bekeken moet worden) $f(x) = -3 - x\sqrt{x+3}$ 1
- $f'(x) = -\sqrt{x+3} - x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$ 2
- $f'(x) = 0$ geeft $-(x+3) - \frac{1}{2}x = 0$ (of een gelijkwaardige lineaire vergelijking) 1
- Hieruit volgt $x = -2$ (en dit is de x-coördinaat van T) 1

Opmerking
Als in het tweede antwoordelement de productregel, quotiëntregel of kettingregel is gebruikt, maar niet correct, mag voor dit antwoordelement maximaal 1 scorepunt worden toegekend op basis van vakspecifieke regel 1.

Een gebroken functie

10 maximumscore 4

- De vergelijking $\frac{5}{4x-6} = x - 3\frac{1}{2}$ moet worden opgelost 1
- Dit geeft $x^2 - 5x + 4 = 0$ 1
- Herleiden tot $(x-1)(x-4) = 0$ geeft $x = 1$ of $x = 4$ 1
- De coördinaten van punt B zijn $(4, \frac{1}{2})$ 1

11 maximumscore 5

- De inhoud van het linkerdeel is gelijk aan $\pi \cdot \int_0^1 \left(\frac{5}{4x-6}\right)^2 \mathrm{d}x$ 1
- De inhoud van het rechterdeel is gelijk aan $\pi \cdot \int_1^{3\frac{1}{2}} \left(x - 3\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $\left(\frac{5}{4x-6}\right)^2$ is $\frac{-25}{4(4x-6)}$ 1
- Een primitieve van $\left(x-3\frac{1}{2}\right)^2$ is $\frac{1}{3}\left(x-3\frac{1}{2}\right)^3$ 1
- De inhoud is $(2\frac{1}{12}\pi + 5\frac{5}{24}\pi =)\ 7\frac{7}{24}\pi$ 1

of

- De inhoud van het linkerdeel is gelijk aan $\pi \cdot \int_0^1 \left(\frac{5}{4x-6}\right)^2 \mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $\left(\frac{5}{4x-6}\right)^2$ is $\frac{-25}{4(4x-6)}$ 1
- De inhoud van het rechterdeel is gelijk aan de inhoud van de kegel die ontstaat door lijn k van $x = 1$ tot $x = 4$ om de x-as te wentelen 1
- De hoogte van de kegel is $2\frac{1}{2}$, de straal van het grondvlak G is $(\left|-2\frac{1}{2}\right|) = 2\frac{1}{2}$, de inhoud van de kegel is te berekenen met $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ 1
- De inhoud is $(2\frac{1}{12}\pi + 5\frac{5}{24}\pi =)\ 7\frac{7}{24}\pi$ 1

12 maximumscore 4

- Er geldt $g(x)=\dfrac{5}{4x-6}+a$ en de grafiek van g heeft een verticale asymptoot met vergelijking $x=1\frac{1}{2}$ 1
- De horizontale asymptoot van de grafiek van g heeft vergelijking $y=a$ 1
- De verticale asymptoot van de grafiek van de inverse functie van g (ontstaan door spiegeling in de lijn met vergelijking $y=x$) is dus de lijn met vergelijking $x=a$ 1
- ($\left|a-1\frac{1}{2}\right|=4$, dus) $a=-2\frac{1}{2}$ of $a=5\frac{1}{2}$ 1

of

- Er geldt $g(x)=\dfrac{5}{4x-6}+a$ en de grafiek van g heeft een verticale asymptoot met vergelijking $x=1\frac{1}{2}$ 1
- Voor de grafiek van de inverse functie van g geldt $y=\dfrac{5}{4(x-a)}+1\frac{1}{2}$ 1
- De verticale asymptoot van de grafiek van de inverse functie van g heeft vergelijking $x=a$ 1
- ($\left|a-1\frac{1}{2}\right|=4$, dus) $a=-2\frac{1}{2}$ of $a=5\frac{1}{2}$ 1

Gebroken goniometrische functie

13 **maximumscore 6**

- De vergelijking $\dfrac{\cos(x)}{-\sin^2(x)}=\sqrt{2}$ moet worden opgelost 1
- $\dfrac{\cos(x)}{\cos^2(x)-1}=\sqrt{2}$ 1
- Hieruit volgt $\sqrt{2}\cdot\cos^2(x)-\cos(x)-\sqrt{2}=0$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking exact opgelost kan worden 1
- Dit geeft $\cos(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ($\cos(x)=\sqrt{2}$ heeft geen oplossingen) 1
- Hieruit volgt dat de coördinaten van A en B $\frac{3}{4}\pi$ en $\frac{5}{4}\pi$ zijn 1

14 **maximumscore 4**

- De punten zijn $P\left(0,\frac{1}{p}\right)$, $Q\left(\pi,-\frac{1}{p}\right)$ en $R\left(2\pi,\frac{1}{p}\right)$ 1
- De richtingscoëfficiënt van PQ is $-\dfrac{2}{p\pi}$ en van QR $\dfrac{2}{p\pi}$ 1
- PQ en QR staan loodrecht op elkaar als $-\dfrac{2}{p\pi}\cdot\dfrac{2}{p\pi}=-\dfrac{4}{p^2\pi^2}=-1$ 1
- Hieruit volgt $p=-\dfrac{2}{\pi}$ of $p=\dfrac{2}{\pi}$ 1

of

- De punten zijn $P\left(0,\frac{1}{p}\right)$, $Q\left(\pi,-\frac{1}{p}\right)$ en $R\left(2\pi,\frac{1}{p}\right)$ 1
- $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}\pi\\ -\frac{2}{p}\end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{QR}=\begin{pmatrix}\pi\\ \frac{2}{p}\end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{PQ}$ en $\overrightarrow{QR}$ staan loodrecht op elkaar als $\begin{pmatrix}\pi\\ -\frac{2}{p}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\pi\\ \frac{2}{p}\end{pmatrix}=\pi^2-\dfrac{4}{p^2}=0$ 1
- Hieruit volgt $p=-\dfrac{2}{\pi}$ of $p=\dfrac{2}{\pi}$ 1

of

- De punten zijn $P\left(0, \frac{1}{p}\right)$, $Q\left(\pi, -\frac{1}{p}\right)$ en $R\left(2\pi, \frac{1}{p}\right)$ 1
- Omdat driehoek PQR symmetrisch is ten opzichte van de verticale lijn door Q en $x_Q - x_P = \pi$, staan PQ en QR loodrecht op elkaar als ook $\left|y_P - y_Q\right| = \pi$ 1
- Dus als $\left(\left|\frac{1}{p} - -\frac{1}{p}\right| =\right)$ $\left|\frac{2}{p}\right| = \pi$ 1
- Hieruit volgt $p = -\dfrac{2}{\pi}$ of $p = \dfrac{2}{\pi}$ 1

of

- De punten zijn $P\left(0, \frac{1}{p}\right)$, $Q\left(\pi, -\frac{1}{p}\right)$ en $R\left(2\pi, \frac{1}{p}\right)$ 1
- De lengte van PQ en van QR is $\sqrt{\pi^2 + \left(\frac{2}{p}\right)^2}$ (of het kwadraat is $\pi^2 + \left(\frac{2}{p}\right)^2$) 1
- PQ en QR staan loodrecht op elkaar als $\pi^2 + \left(\frac{2}{p}\right)^2 + \pi^2 + \left(\frac{2}{p}\right)^2 = (2\pi)^2$, dus als $\pi^2 = \dfrac{4}{p^2}$ 1
- Hieruit volgt $p = -\dfrac{2}{\pi}$ of $p = \dfrac{2}{\pi}$ 1

Twee punten op een grafiek

15 maximumscore 5

- Er geldt: $P\left(p,\, p\cdot \mathrm{e}^{p}\right)$ en $Q\left(2p,\, 2p\cdot \mathrm{e}^{2p}\right)$ 1`
- De richtingscoëfficiënt van de lijn door P en Q is $\dfrac{2p\cdot \mathrm{e}^{2p} - p\cdot \mathrm{e}^{p}}{p}$ 1
- Er moet gelden: $2\cdot \mathrm{e}^{2p} - \mathrm{e}^{p} = 6$ 1
- Beschrijven hoe uit deze vergelijking een exacte waarde voor e^{p} gevonden kan worden 1
- Dit geeft (omdat $\mathrm{e}^{p} = -\frac{3}{2}$ geen oplossing heeft) $p = \ln(2)$ 1

of

- Er geldt: $P\left(p,\, p\cdot \mathrm{e}^{p}\right)$ en $Q\left(2p,\, 2p\cdot \mathrm{e}^{2p}\right)$ 1
- Een vergelijking van de lijn door P en Q is $y = 6x + b$; invullen van de coördinaten van P geeft $b = p\cdot \mathrm{e}^{p} - 6p$ 1
- Uit invullen van de coördinaten van Q in $y = 6x + p\cdot \mathrm{e}^{p} - 6p$ volgt $2\cdot \mathrm{e}^{2p} - \mathrm{e}^{p} = 6$ 1
- Beschrijven hoe uit deze vergelijking een exacte waarde voor e^{p} gevonden kan worden 1
- Dit geeft (omdat $\mathrm{e}^{p} = -\frac{3}{2}$ geen oplossing heeft) $p = \ln(2)$ 1

Cito CTE

Cito
Amsterdamseweg 13
6814 CM Arnhem
Postbus 1034
6801 MG Arnhem
T (026) 352 11 11
www.cito.nl